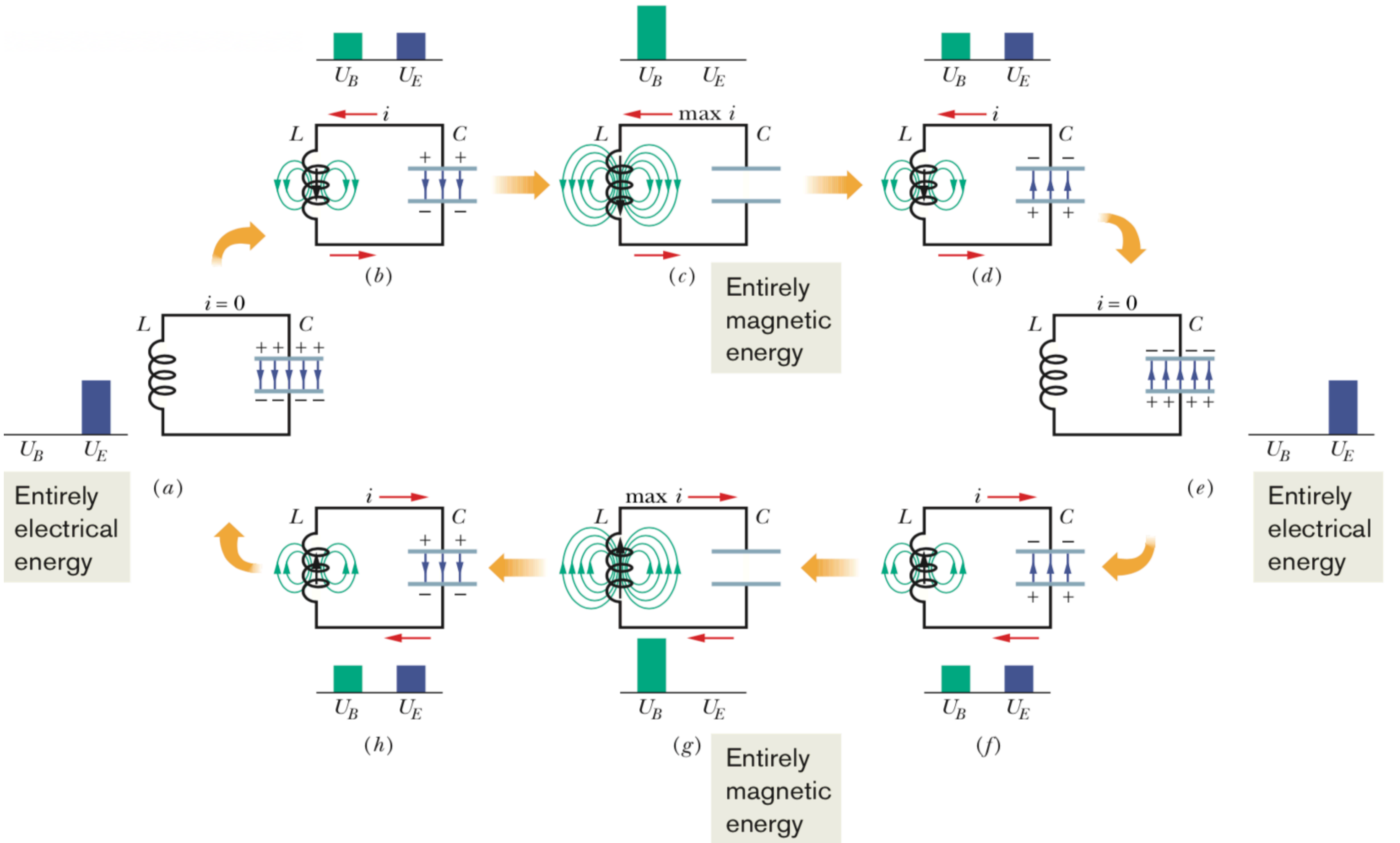
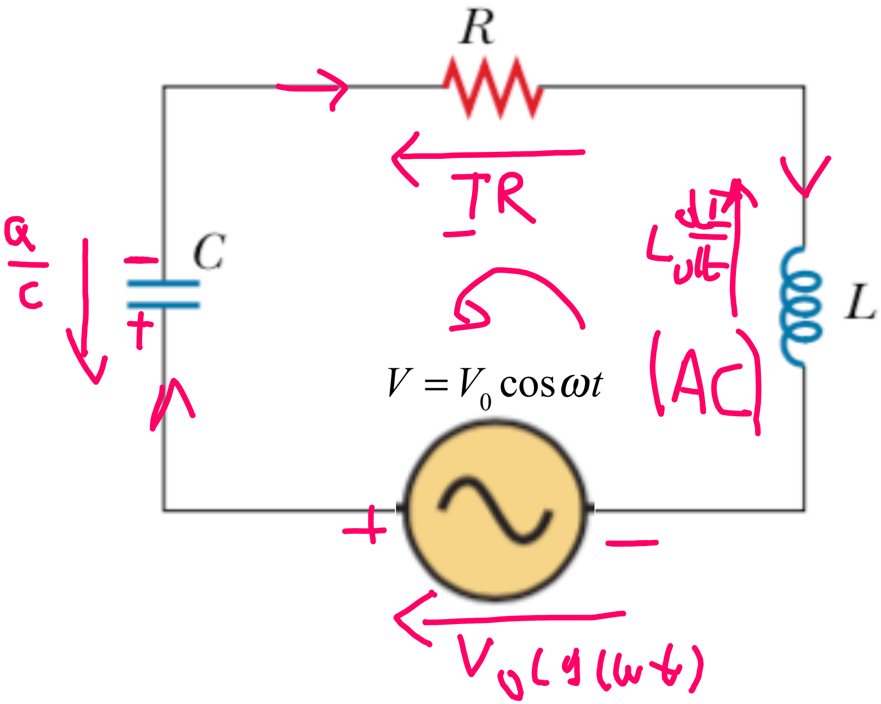
Wykład 18

Obwody RLC, cz. 2



Obwody RLC ze źródłem napięcia przemiennego



II prawo Kirchhoffa:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} + L\frac{dI}{dt} = 0$$

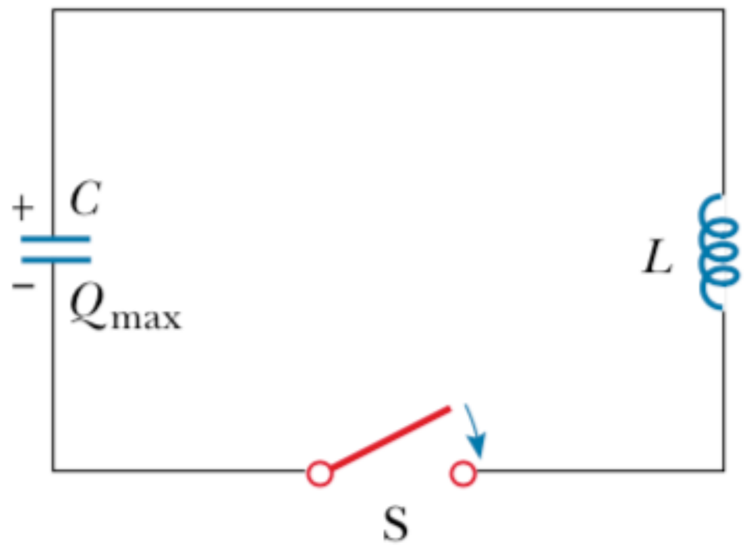
po całym obwodzie zamkniętym

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} - V_0 \cos\omega t = 0$$

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = V_0 \cos\omega t}$$

Obwody LC bez źródła napięcia



$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = V_0 \cos\omega t$$

$$V_0 = 0$$

$$R = 0$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = 0} \xrightarrow[\text{rozwiązanie}]{t=0,\ Q = Q_{max}} Q = Q_{max}\cos(\omega_0 t + \phi)$$

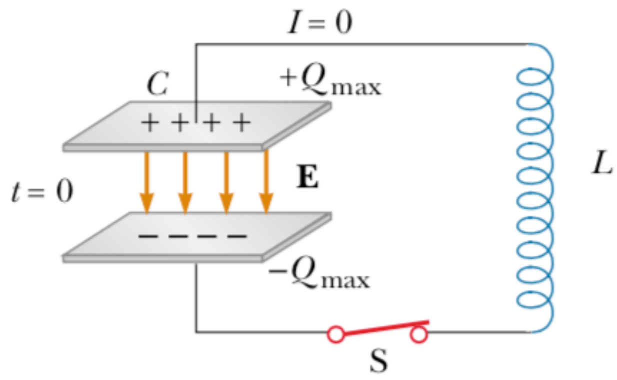
Równanie równoważne równaniu oscylatora harmonicznego prostego

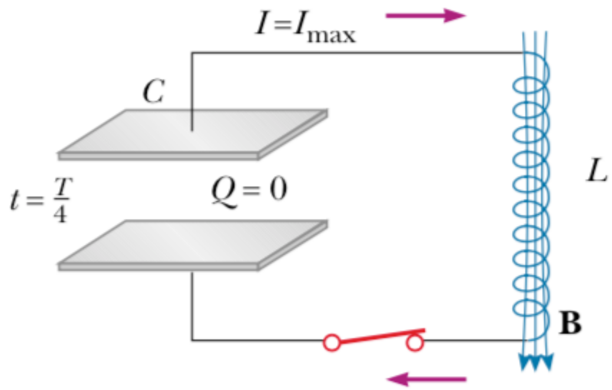
Częstość kątowa drgań własnych układu

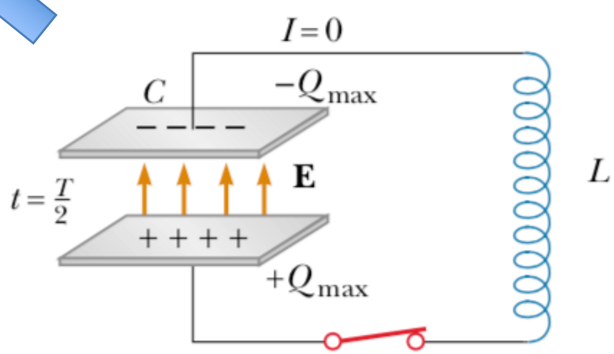
$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$$

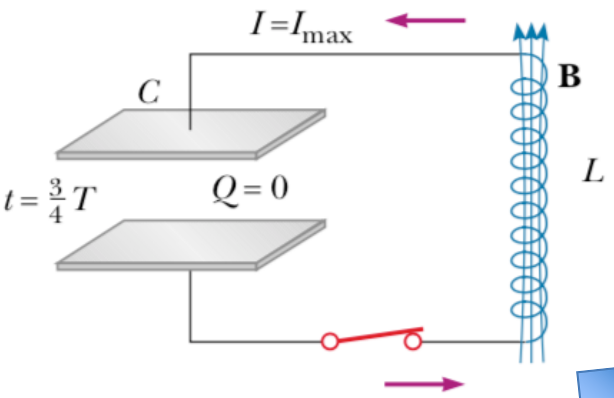
Drgania w obwodach LC

Zakładając brak strat energii na oporze (R = 0), występuje oscylacyjna wymiana energii między kondensatorem i cewką.

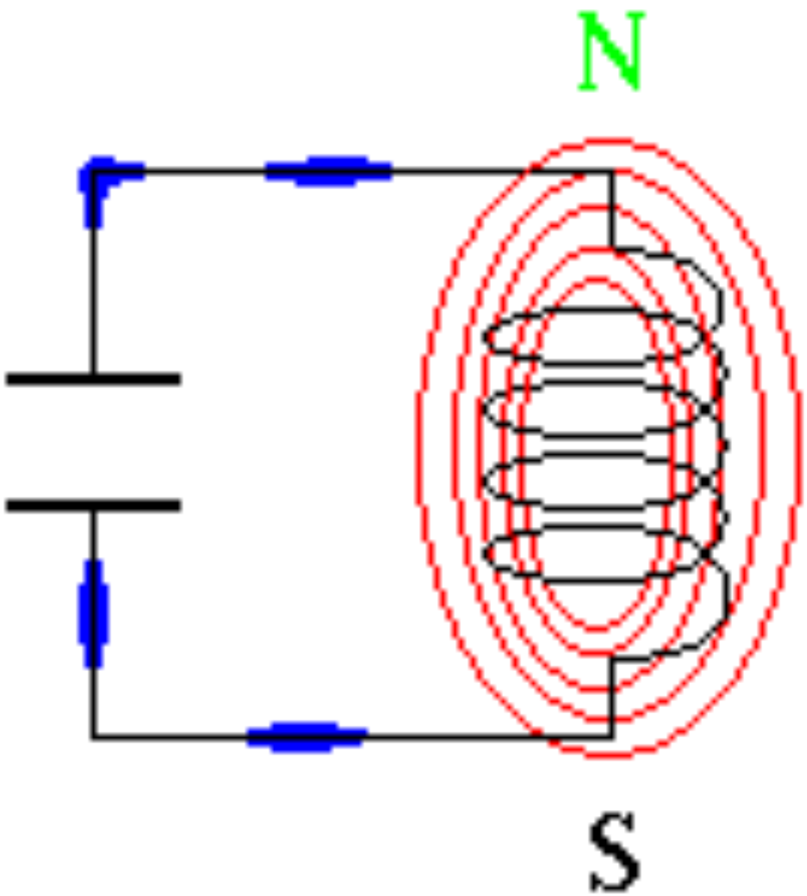


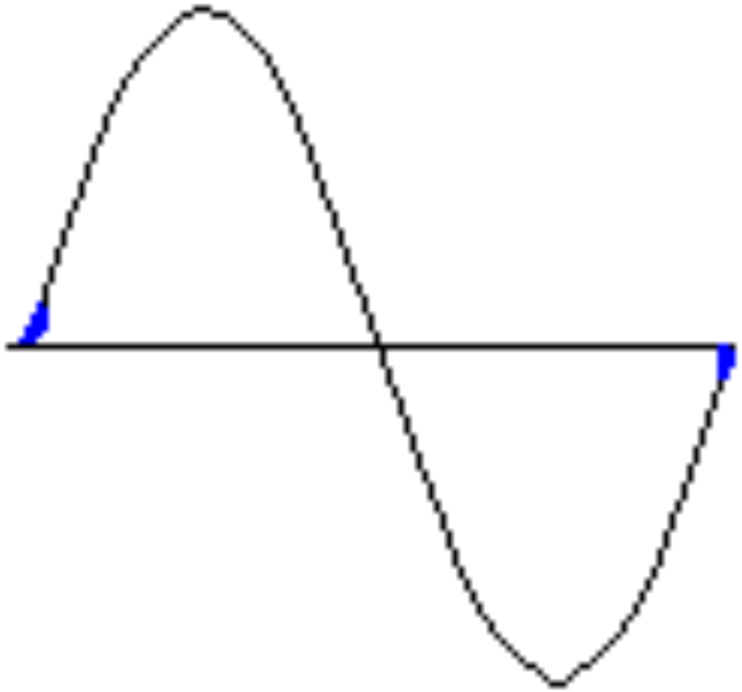






Drgania w obwodach LC





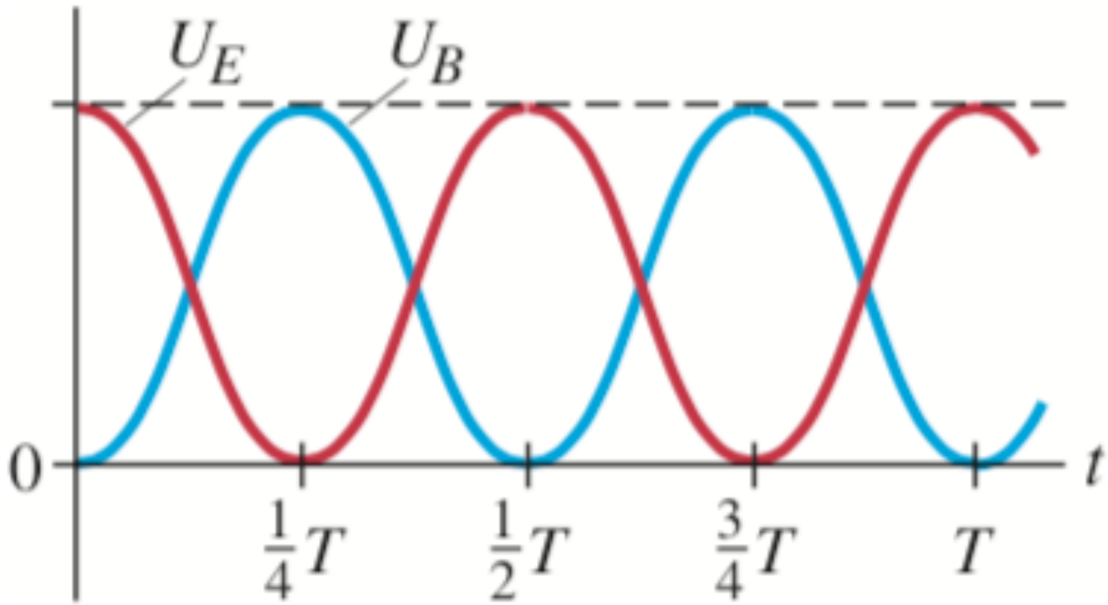
Obwody LC – oscylacje energii

Energia zmagazynowana w kondensatorze:

$$U_E = \frac{1}{2} C V_C^2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_{\max}^2}{2C} \cos^2\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

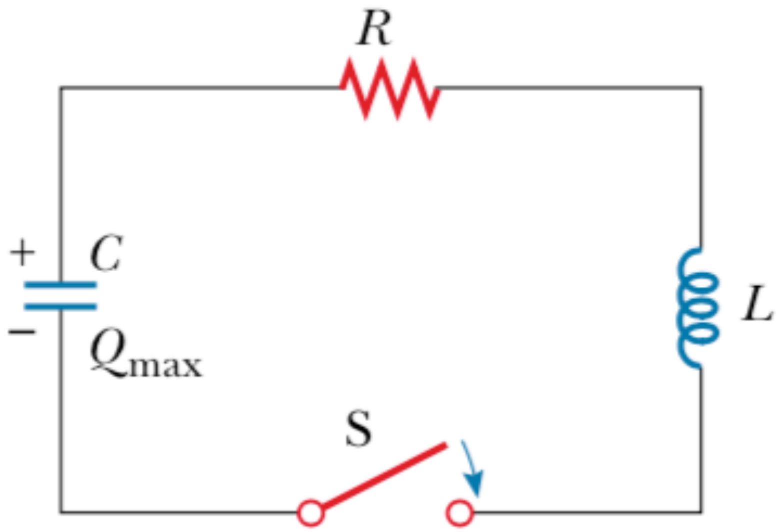
Energia zmagazynowana w cewce:

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_{\max}^2 \sin^2\left(\omega_0 t + \phi\right) = \frac{Q_{\max}^2}{2C} \sin^2\left(\omega_0 t + \phi\right)$$



Obwody RLC bez źródła napięcia

W rzeczywistych obwodach *LC* zawsze występuje strata energii na oporze *R*:



$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{LC}=V_0\cos\omega t$$

$$V_0=0$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{LC}=0$$

$$\boxed{\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{LC}=0} \xrightarrow{\text{rozwiązanie}} Q=Q_{max}e^{-Rt/2L}\cos\omega t$$

Równanie równoważne równaniu tłumionego oscylatora harmonicznego

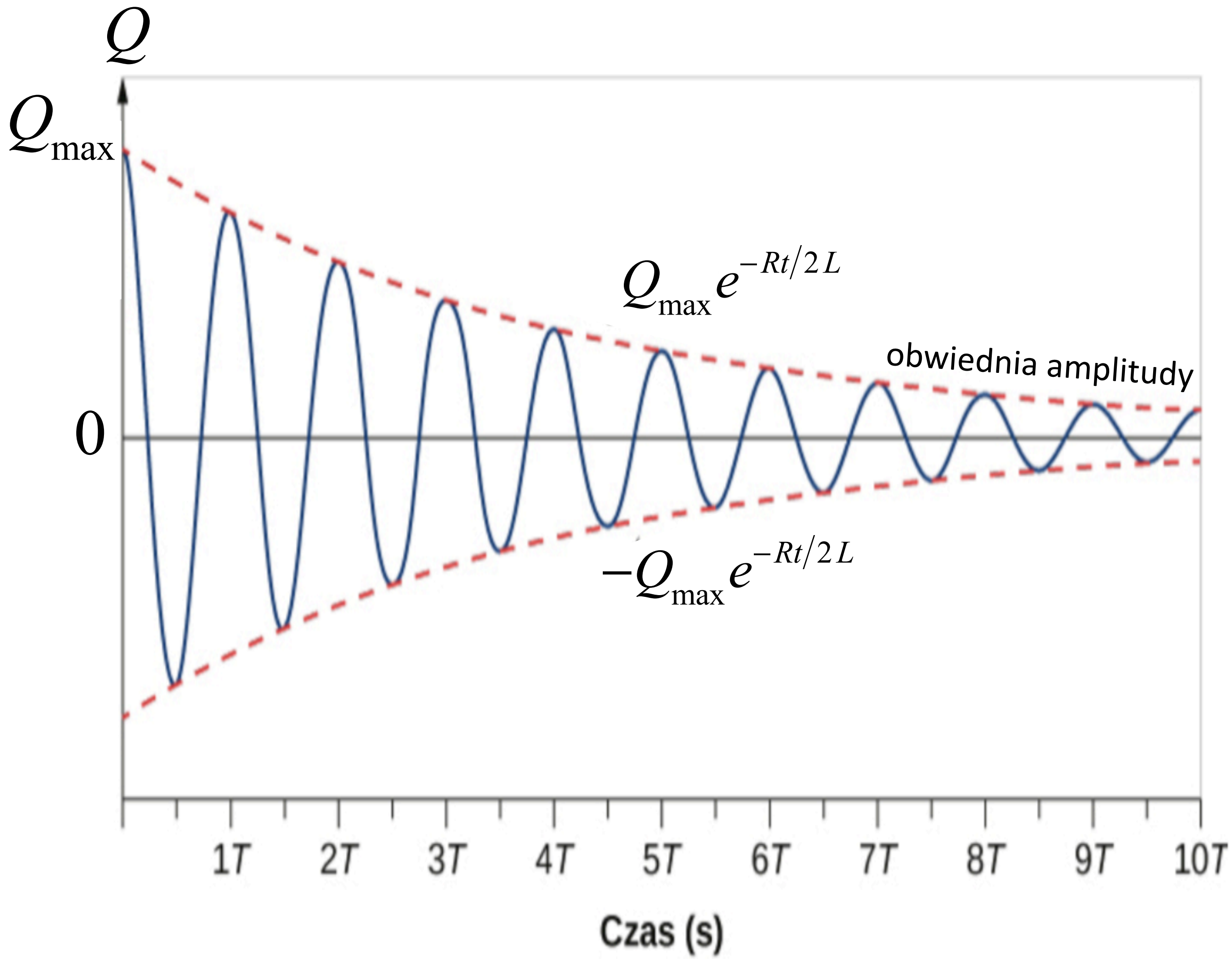
Przy relatywnie słabym tłumieniu częstość drgań układu wynosi

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Obwody RLC – słabe drgania tłumione

$$Q = Q_{\max} e^{-Rt/2L} \cos \omega t$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$



Słuszne przy warunku:

$$R^2 < \frac{4L}{C}$$

Obwody RLC – krytyczne i silne drgania tłumione

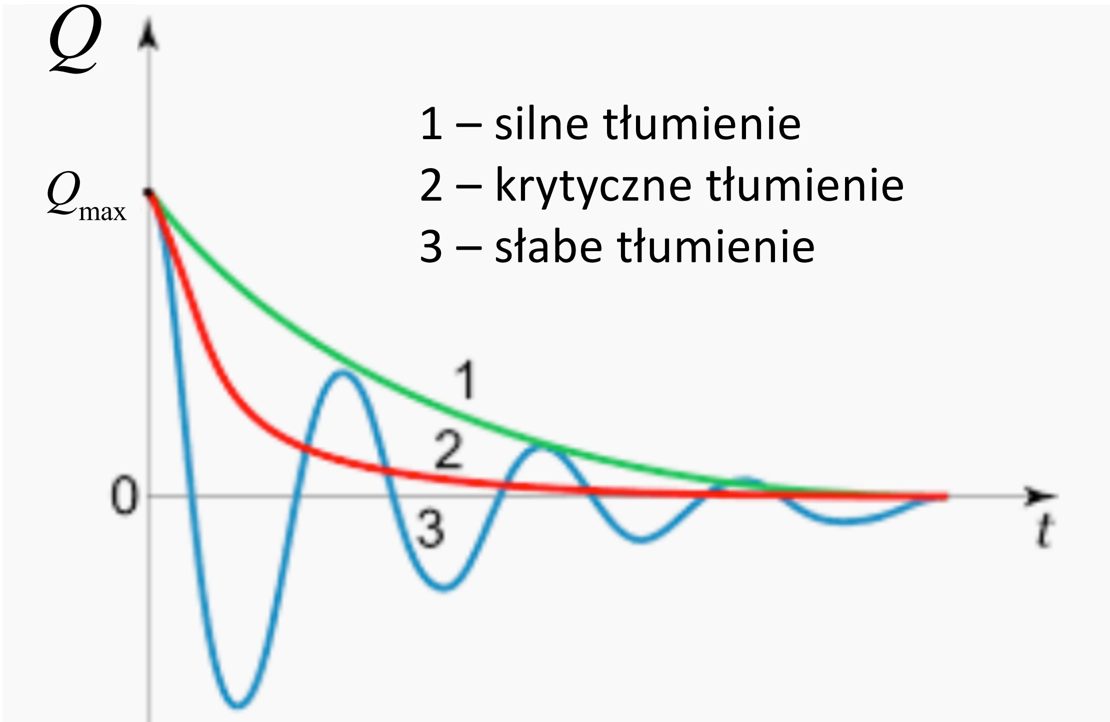
$$Q = Q_{\max} e^{-Rt/2L}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

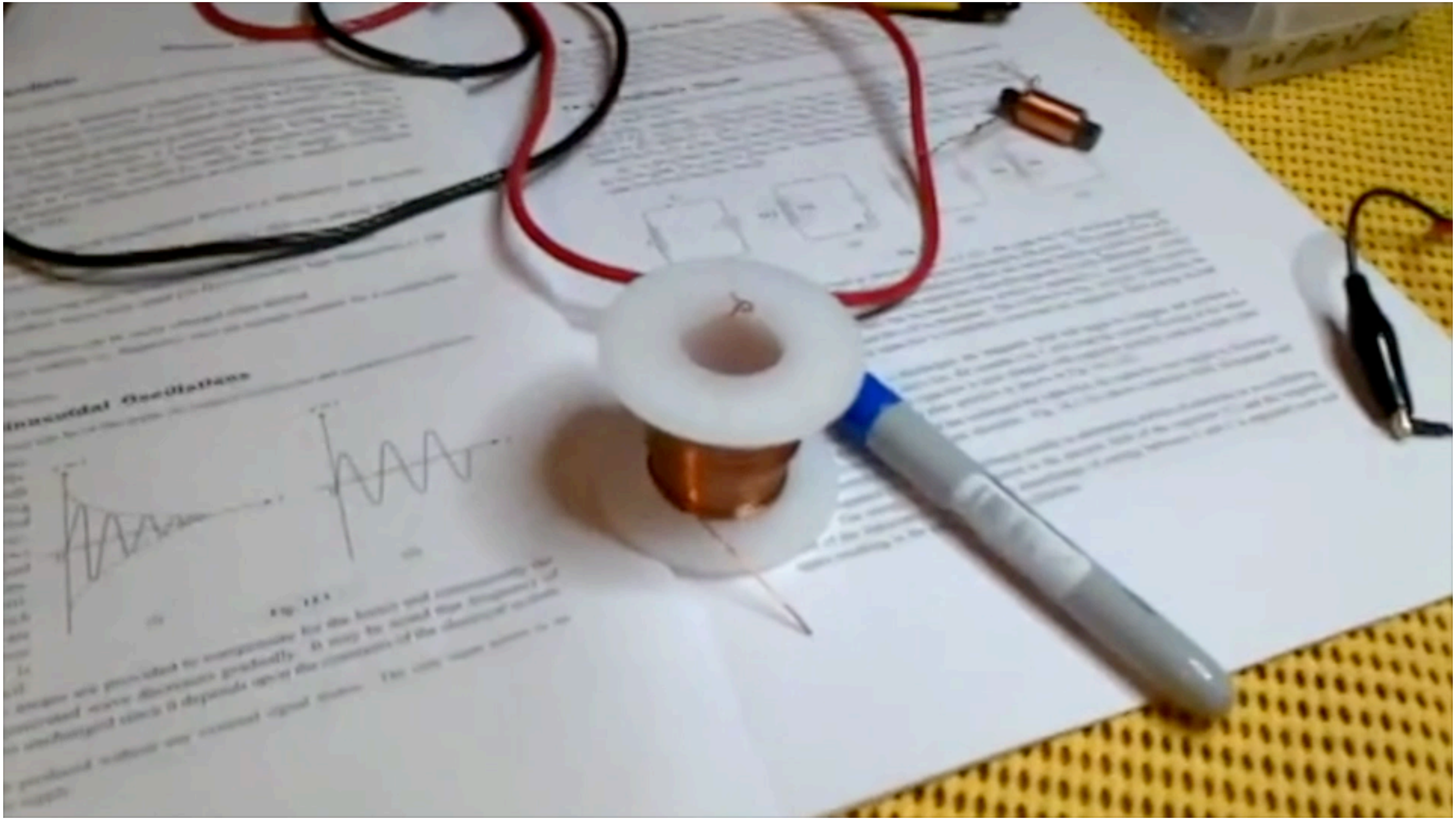
Słabe tłumienie: $R^2 < \dfrac{4L}{C}$

Tłumienie krytyczne: $R^2 = \dfrac{4L}{C}$, dla większych *R* oscylacje nie występują

Silne tłumienie: $R^2 > \dfrac{4L}{C}$

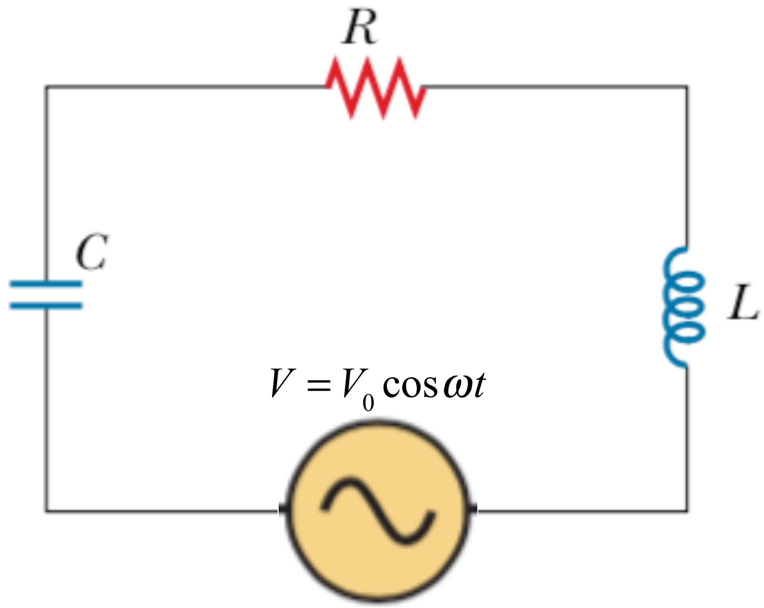


Drgania tłumione w obwodzie RLC



https://www.youtube.com/watch?v=XSUiCeCHAvw

Obwody RLC ze źródłem napięcia przemiennego



$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = V_0 \cos\omega t$$

Równanie równoważne równaniu tłumionego oscylatora harmonicznego z siłą wymuszającą

Rozwiązanie stacjonarne na natężenie prądu: $I = I_0 \cos(\omega t - \phi)$

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

gdzie

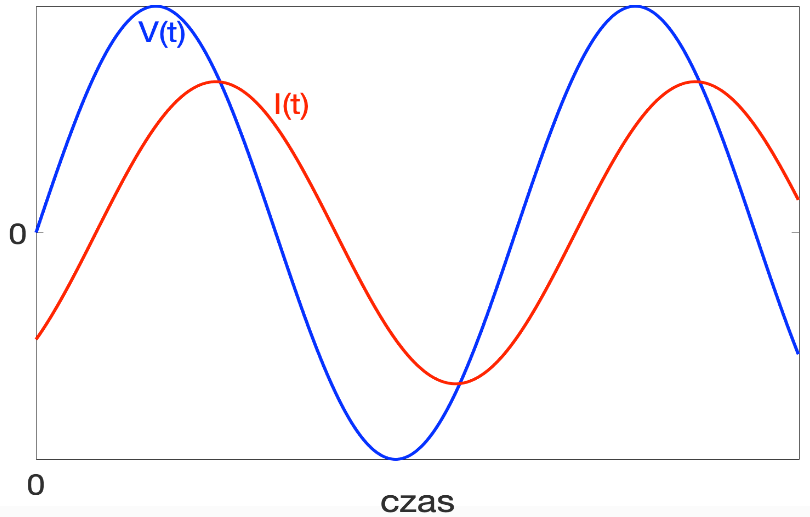
$$\tan\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Reaktancja: $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$

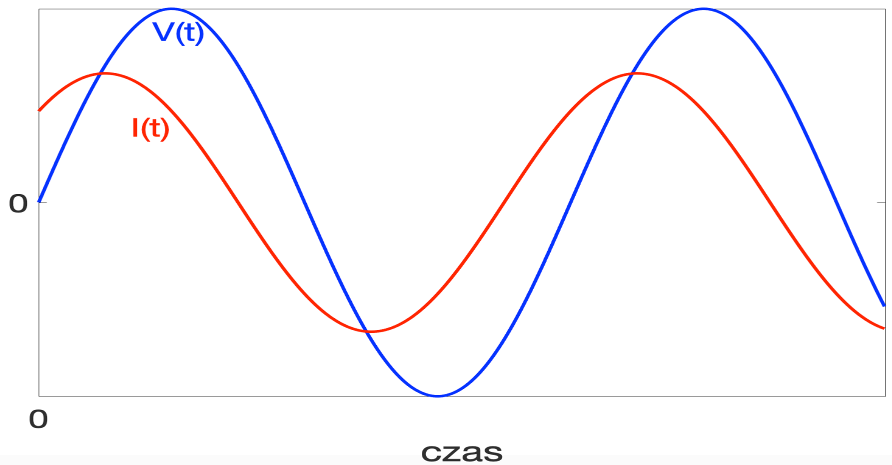
Impedancja (zawada): $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$

Obwody RLC ze źródłem napięcia przemiennego

$\phi > 0 \Rightarrow \omega L > \dfrac{1}{\omega C} \Rightarrow$ Prąd jest opóźniony względem napięcia źródła (wpływ indukcyjności)

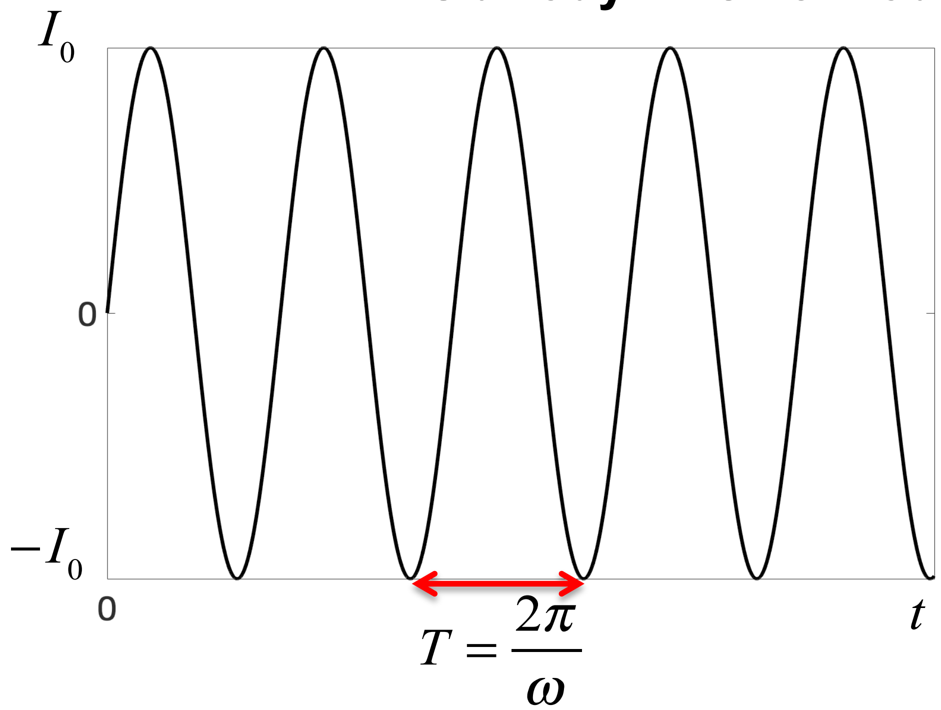


$\phi < 0 \Rightarrow \omega L < \dfrac{1}{\omega C} \Rightarrow$ Prąd wyprzedza w fazie napięcie źródła (wpływ pojemności)



To, że prąd wyprzedza w fazie napięcie nie oznacza, że prąd jest obecny zanim włączymy źródło. Pamiętajmy, że rozwiązanie jest rozwiązaniem stacjonarnym, poprzedza je okres niestacjonarny

Obwody RLC ze źródłem napięcia przemiennego

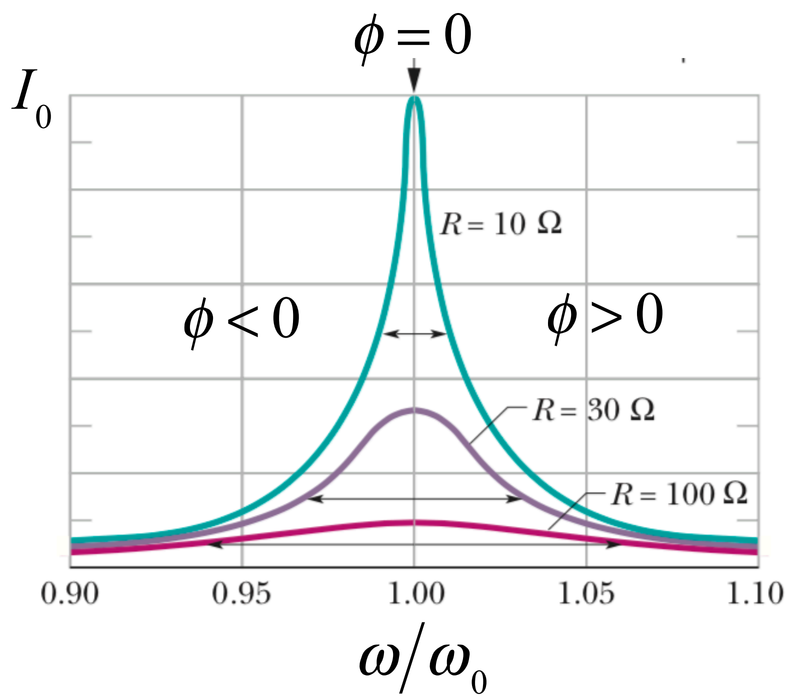


$$\omega \to 0 \Rightarrow I_{max} \to 0$$ wpływ pojemności

$$\omega \to \infty \Rightarrow I_{max} \to 0$$ wpływ indukcyjności

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow I_0 = \frac{V_0}{R}$$ rezonans

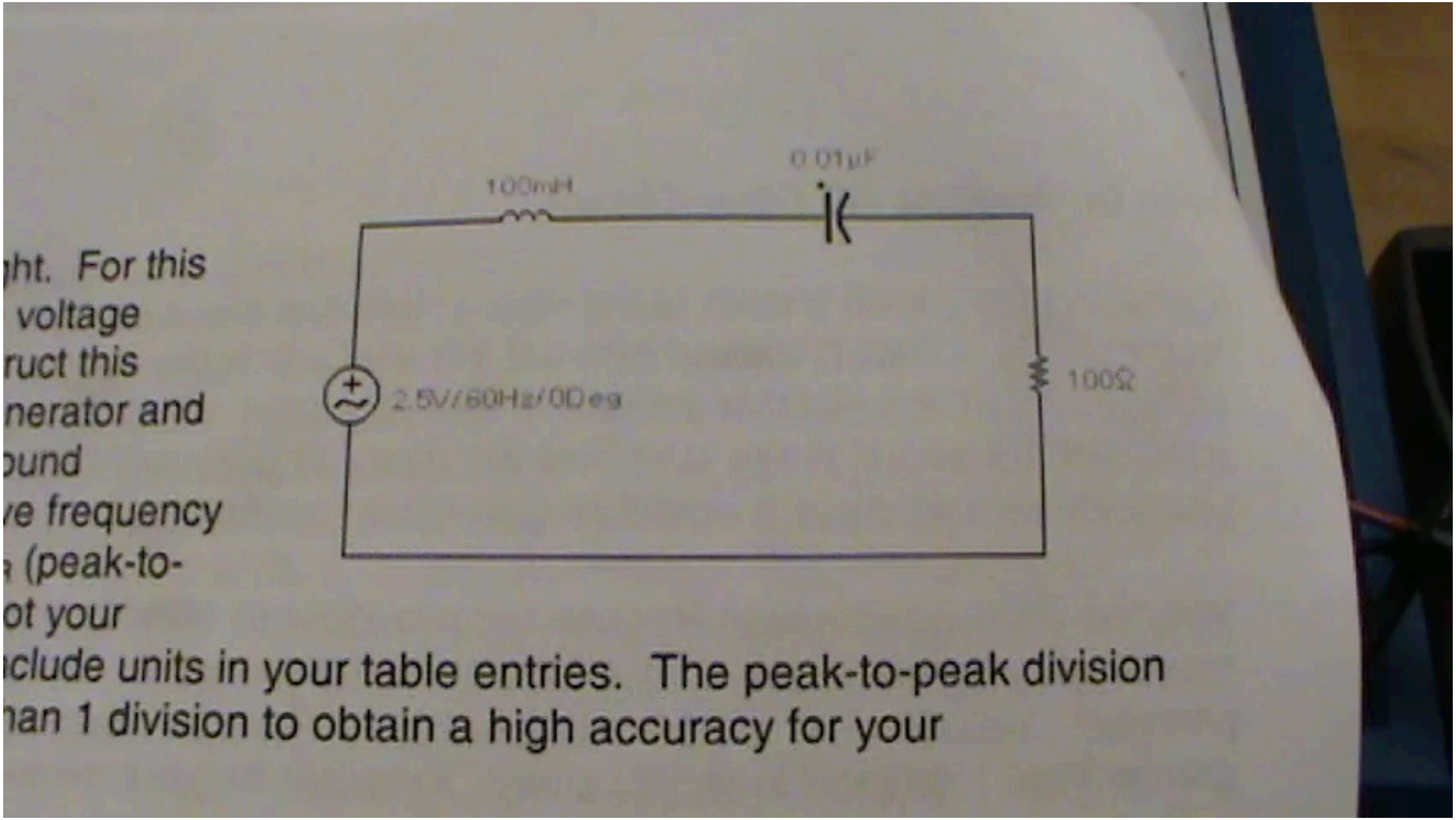
$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$



Dla częstotliwości rezonansowej:

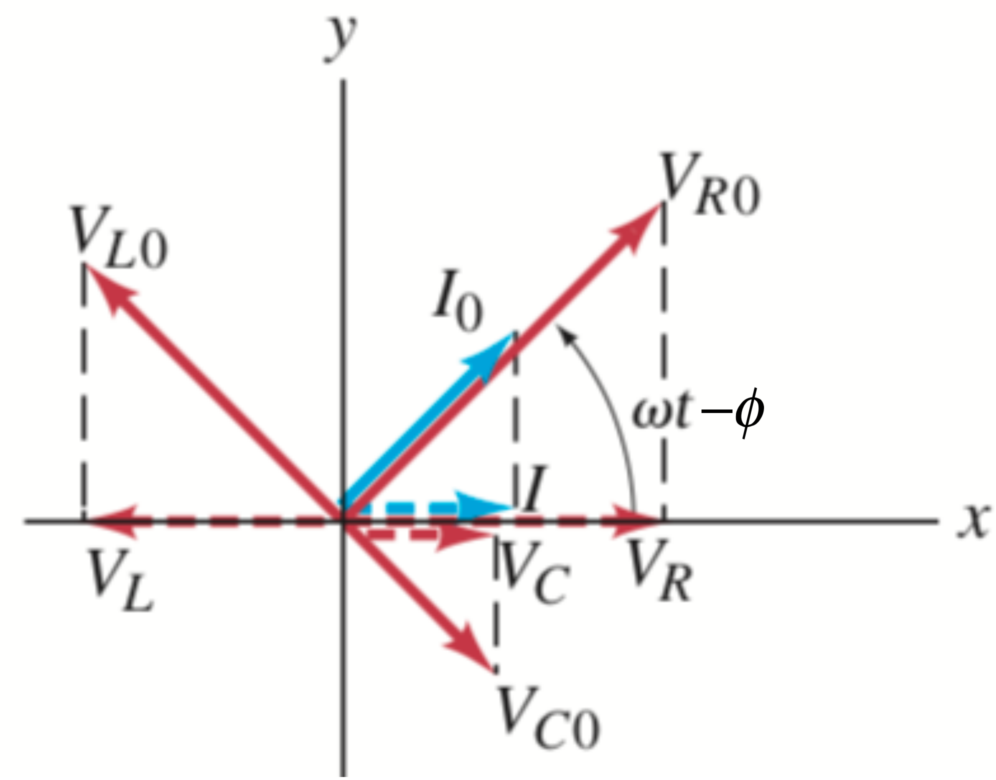
$$X = 0, Z = R,\ \phi = 0$$ prąd i napięcie są w fazie

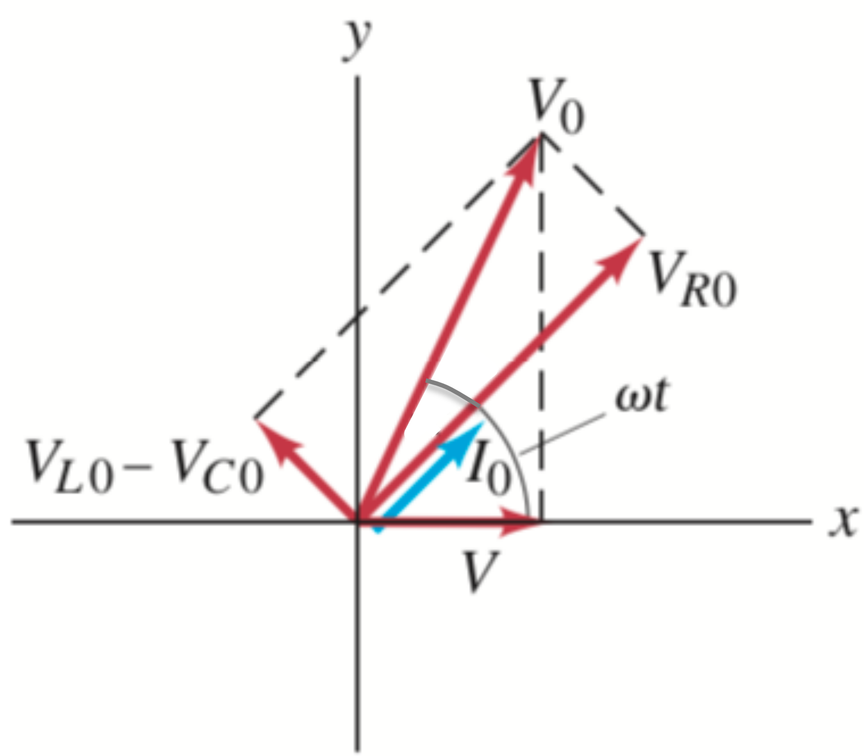
Rezonans w obwodzie RLC ze źródłem napięcia przemiennego



https://www.youtube.com/watch?v=JIRgfMADHbc

Obwody RLC - wskazy





http://www.phy.hk/wiki/j/Eng/RLC/RLC_js.htm

Równania Maxwella

https://www.youtube.com/watch?v=O8OUH0pPyoI