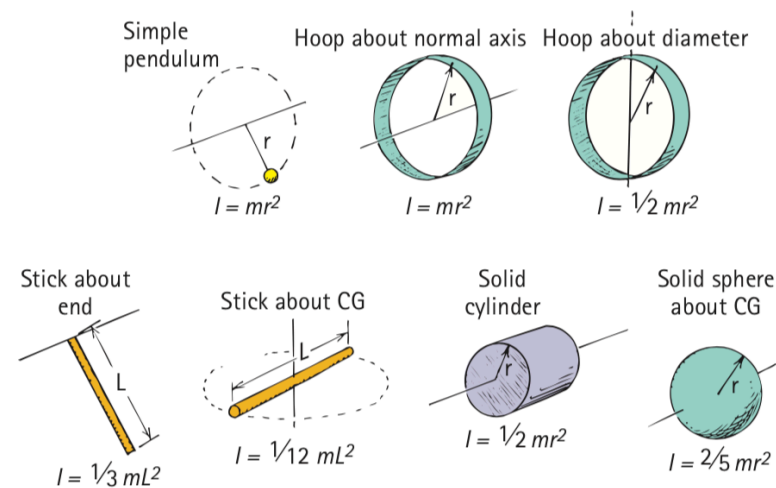
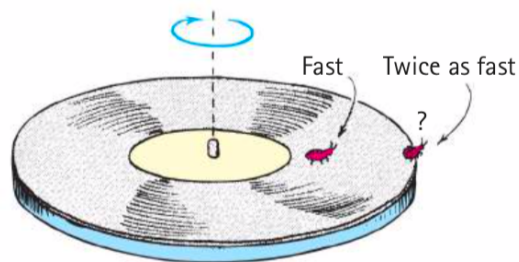
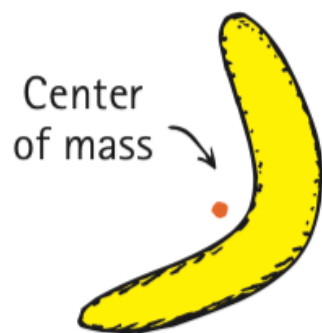


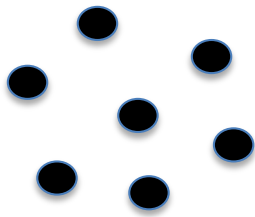
Wykład 15

Środek masy, ruch obrotowy bryły sztywnej, moment bezwładności

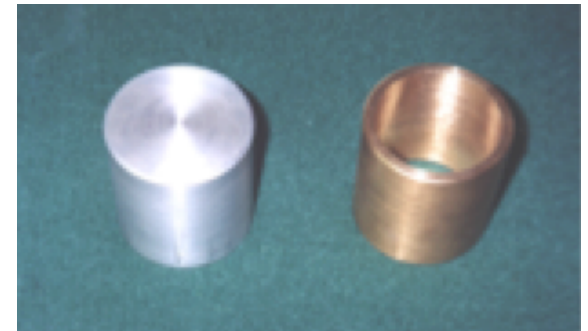
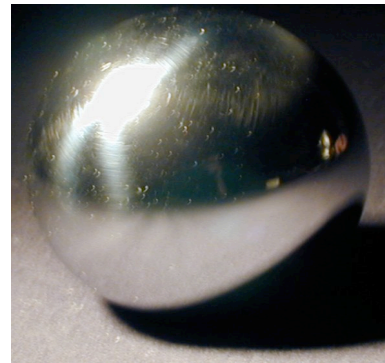


Bryła sztywna

Bryła sztywna to ciało złożone z cząstek (punktów materialnych), które nie mogą się względem siebie przemieszczać. Siły utrzymujące punkty w stałych odległościach są siłami wewnętrznymi bryły sztywnej.



zbiór punktów materialnych
utrzymujących stałą
odległość między sobą



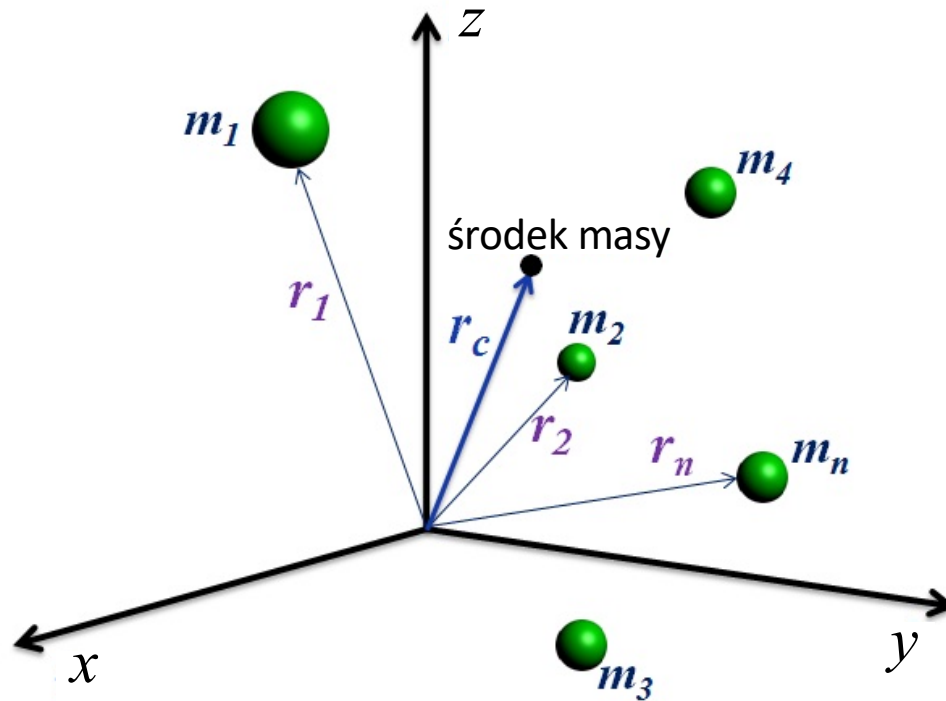
Kij uderzający piłkę
jest bryłą sztywną!



Deformująca się
piłka nie jest bryłą
sztywną!

Środek masy układu cząstek

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

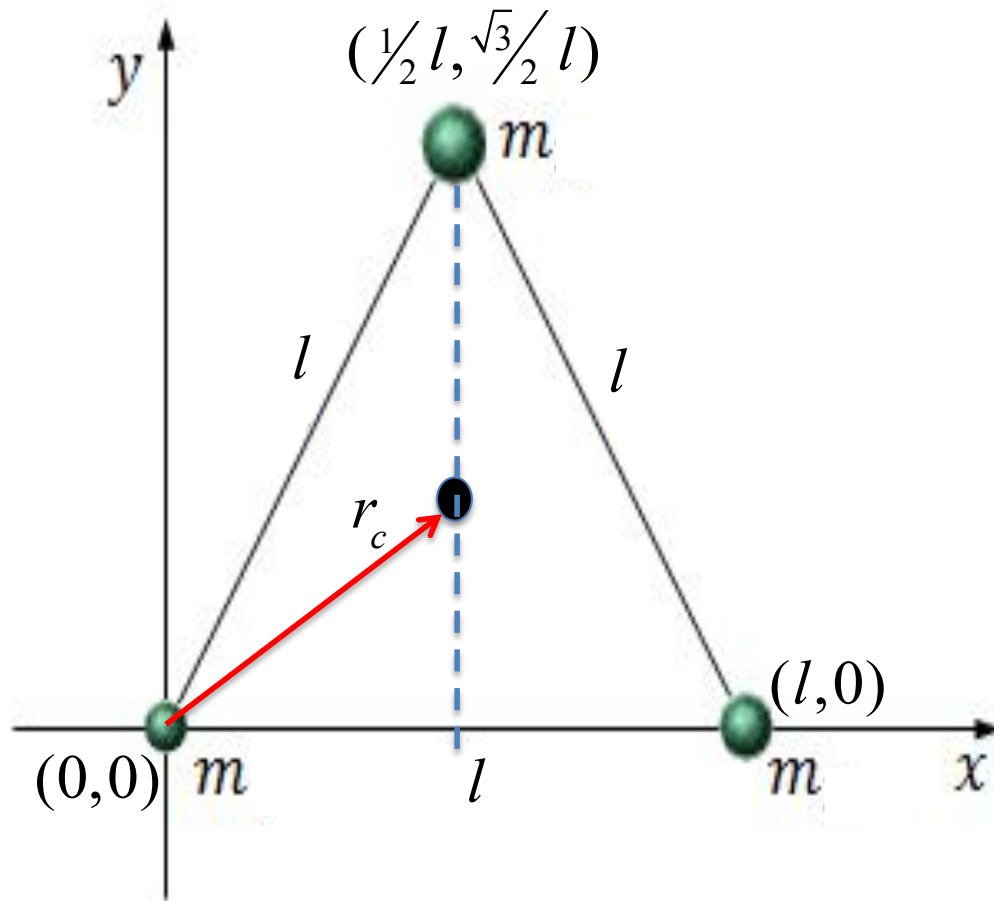


$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

$$z_c = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

Środek masy układu cząstek - przykład



$$\vec{r}_c = \frac{1}{2}l\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{6}l\hat{y}$$

$$x_c = \frac{m \cdot 0 + m \cdot \frac{1}{2}l + m \cdot l}{3m} = \frac{1}{2}l$$

$$y_c = \frac{m \cdot 0 + m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}l + m \cdot 0}{3m} = \frac{\sqrt{3}}{6}l$$

$$z_c = 0$$

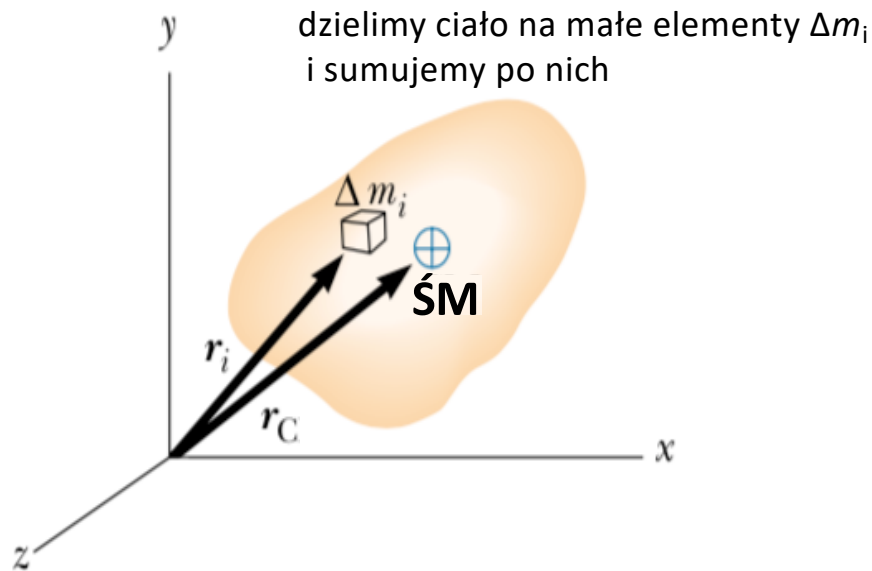
Środek masy ciał rozciągłych

Przepis jak wyznaczyć (całki objętościowe):

$$x_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \Delta m_i x_i \underset{\substack{\Delta m_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}}{=} \frac{1}{M} \int x dm$$

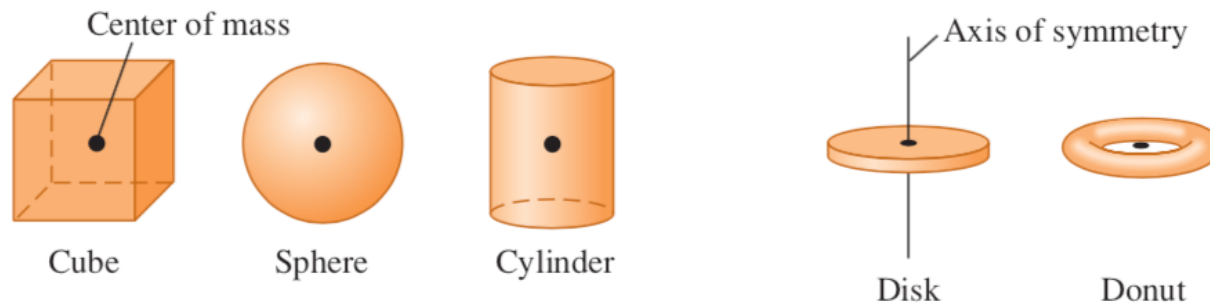
$$y_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \Delta m_i y_i \underset{\substack{\Delta m_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}}{=} \frac{1}{M} \int y dm$$

$$z_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \Delta m_i z_i \underset{\substack{\Delta m_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}}{=} \frac{1}{M} \int z dm$$



Halliday, Resnick, Walker, *Principles of physics*

Obiekty symetryczne o jednorodnie rozłożonej masie:



Sears and Zemansky's, *University Physics with Modern Physics*

Ruch środka masy

(na przykładzie układu n punktów materialnych)

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

Prędkość środka masy: $\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M} \vec{p}_{\text{wyp}}$

pęd środka masy jest
równy wypadkowemu
pędowi układu:

$$\vec{p}_{\text{wyp}} = M\vec{v}_c = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{F}_{\text{wyp}_{\text{zew}}} = \frac{d\vec{p}_{\text{wyp}}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_c}{dt} = M\vec{a}_c$$

Środek masy ciała lub układu ciał to punkt, który porusza się tak, jakby była w nim skupiona cała masa układu, a wszystkie siły zewnętrzne były przyłożone w tym właśnie punkcie.

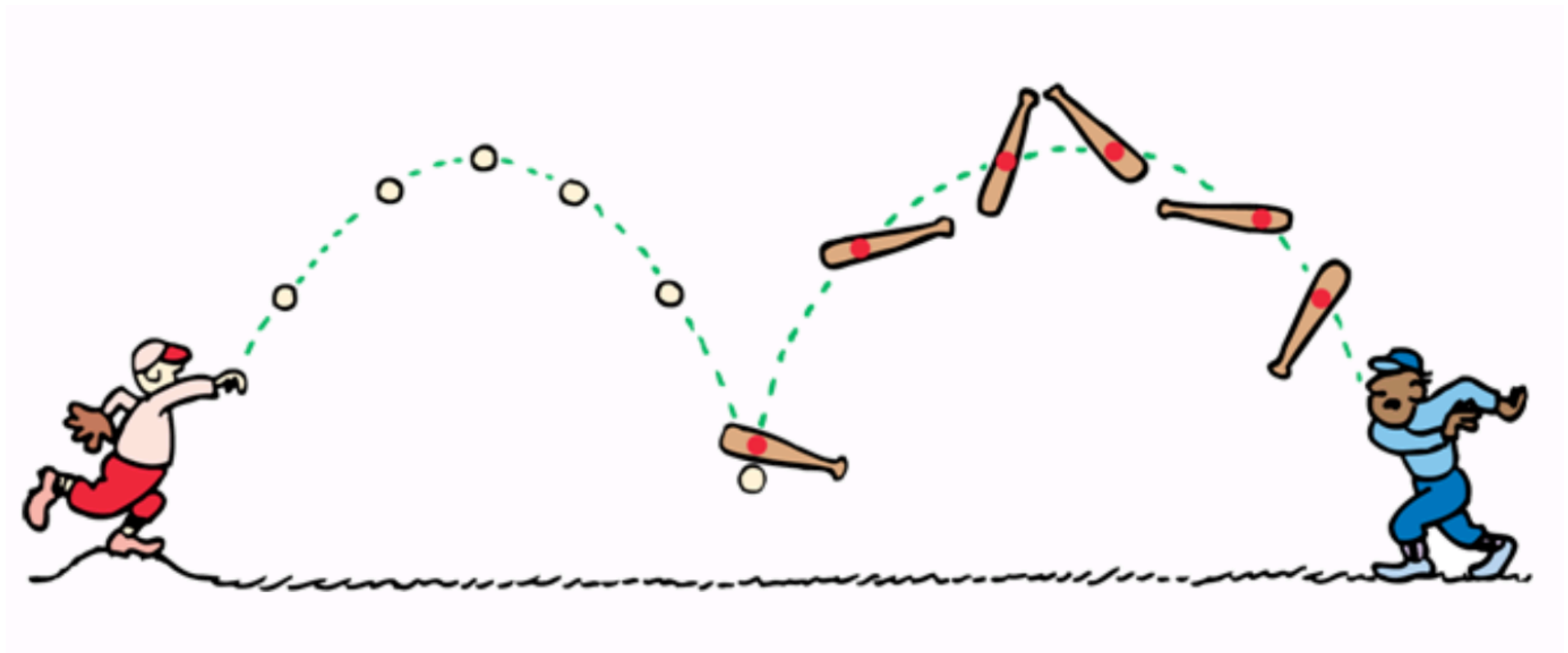
Ruch środka masy

Niezależnie od tego jak bardzo skomplikowany jest byłby ruch elementów układu, środek masy zachowuje się w sposób przewidywalny.



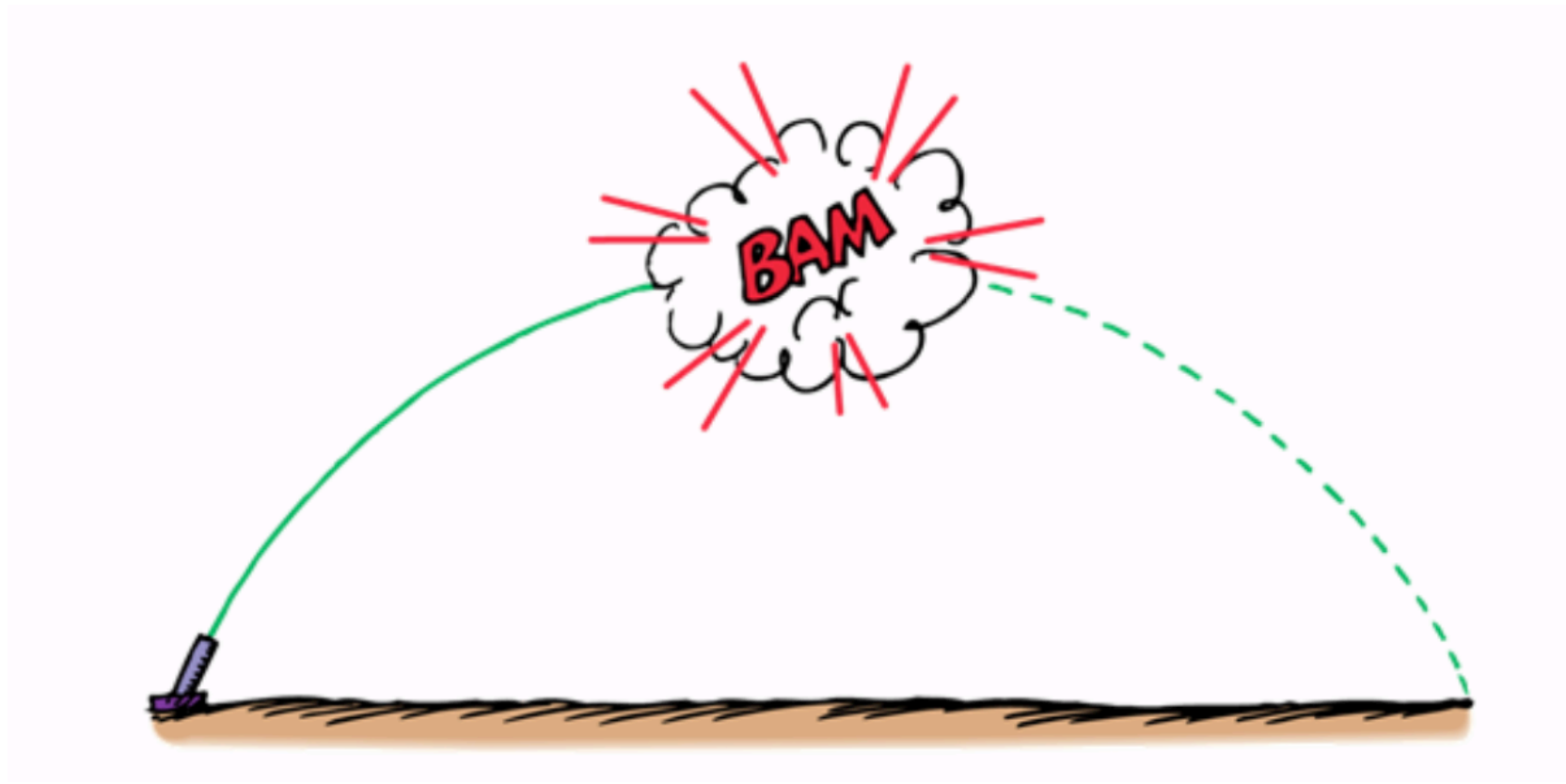
Ruch środka masy

Niezależnie od tego jak bardzo skomplikowany jest byłby ruch elementów układu, środek masy zachowuje się w sposób przewidywalny.



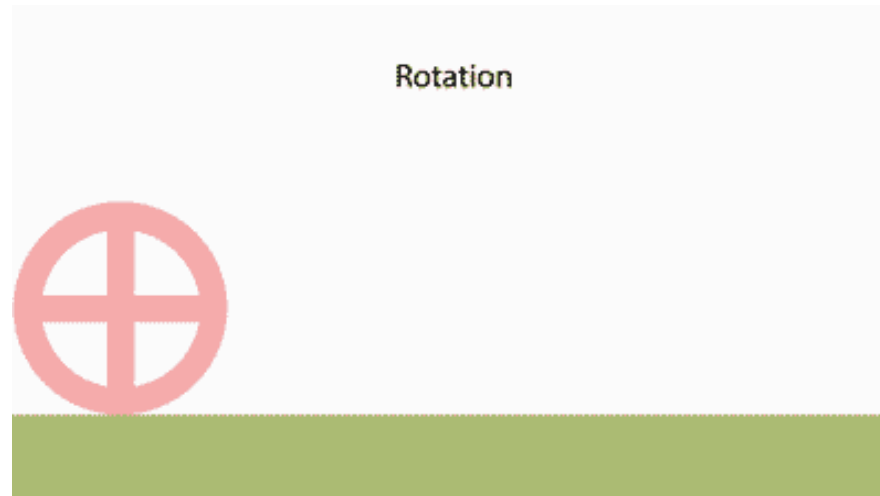
Ruch środka masy

Niezależnie od tego jak bardzo skomplikowany jest byłby ruch elementów układu, środek masy zachowuje się w sposób przewidywalny.



Ruch bryły sztywnej

ruch bryły = ruch postępowy + ruch obrotowy



<https://en.wikipedia.org/wiki/Rolling>

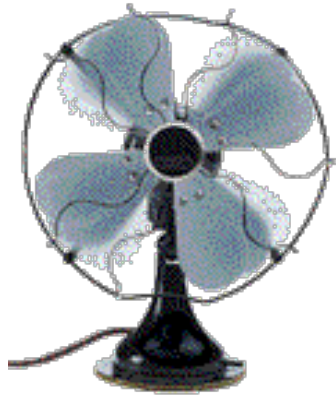
W ruchu postępowym (translacyjnym) bryłę możemy traktować jak punkt materialny (środek masy).

Do opisu ruchu postępowego możemy stosować wszystkie zasady kinematyki i dynamiki słuszne dla punktu materialnego.

Opis czystego ruchu obrotowego wymaga wprowadzenia nowych wielkości fizycznych.

Ruch obrotowy bryły sztywnej wokół stałej osi

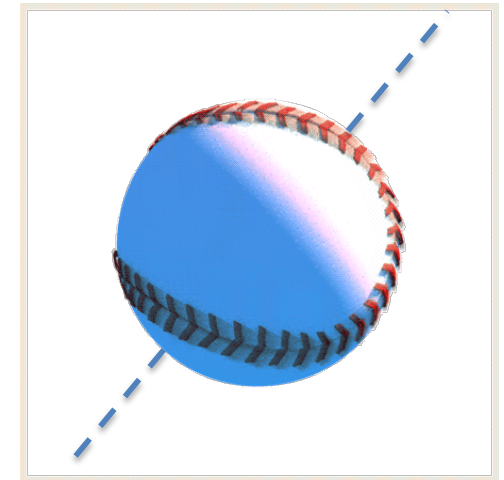
Będziemy rozważać tylko sytuacje, w których oś obrotu nie zmienia swojego kierunku.



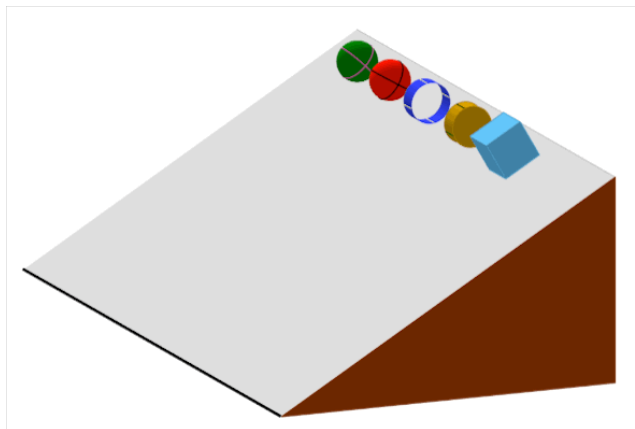
<https://www.picgifs.com/graphics/fan>



<https://www.picgifs.com/graphics/fan>



<https://wifflegif.com/tags/97-animation-gifs?page=927>

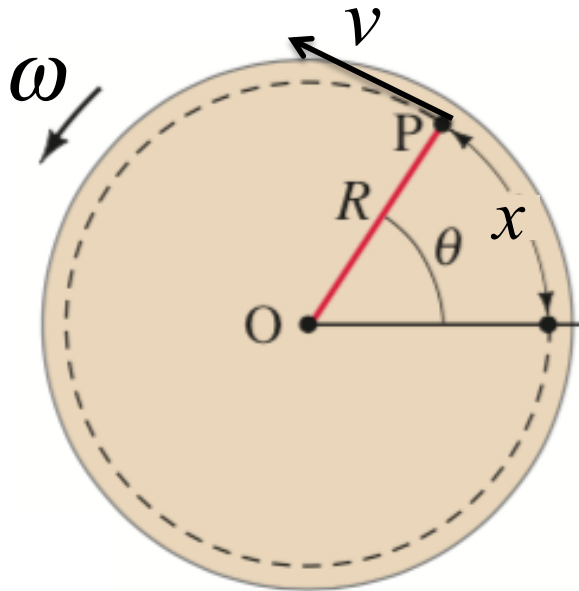


https://www.reddit.com/r/physicsgifs/comments/2z195r/sliding_vs_rolling_moment_of_inertia_demo/

Wielkości kątowe – przesunięcie, prędkość i przyspieszenie

Wielkości kątowe są wygodne do opisu ruchu obrotowego bryły sztywnej, ponieważ nie zależą od odległości od stałej osi obrotu (są takie same dla wszystkich punktów ciała).

dysk rotujący wokół stałej osi
przechodzącej przez jego środek



$$\text{przesunięcie kątowe: } \theta(t) = \frac{x(t)}{R} \quad [\text{rad}]$$

$$\text{prędkość kątowa: } \omega(t) = \dot{\theta} = \frac{v(t)}{R} \quad [\text{rad/s}]$$

$$\text{przyspieszenie kątowe: } \varepsilon(t) = \dot{\omega} = \frac{1}{R} \dot{v} = \frac{a_s(t)}{R} \quad [\text{rad/s}^2]$$

Ruch translacyjny i obrotowy bryły sztywnej – porównanie równań

Ruch postępowy (translacyjny)	Ruch obrotowy
• położenie, x • prędkość liniowa, $v = dx/dt$ • przyspieszenie, $a_s = dv/dt$ • masa, m • energia kinetyczna, $E_k = \frac{1}{2} mv^2$ • siła, $F = ma$ • pęd, $p = mv$	• kąt, θ • prędkość kątowna, $\omega = d\theta/dt$ • przyspieszenie kątowne, $\varepsilon = d\omega/dt$ • xxxxxx • xxxxxx • xxxxxx • xxxxxx

Analogia pomiędzy ruchem prostoliniowym a obrotem ciała wokół stałej osi

Obrót ciała dookoła ustalonej osi odpowiada formalnie ruchowi translacyjnemu ciała w ustalonym kierunku (czyli po linii prostej)....

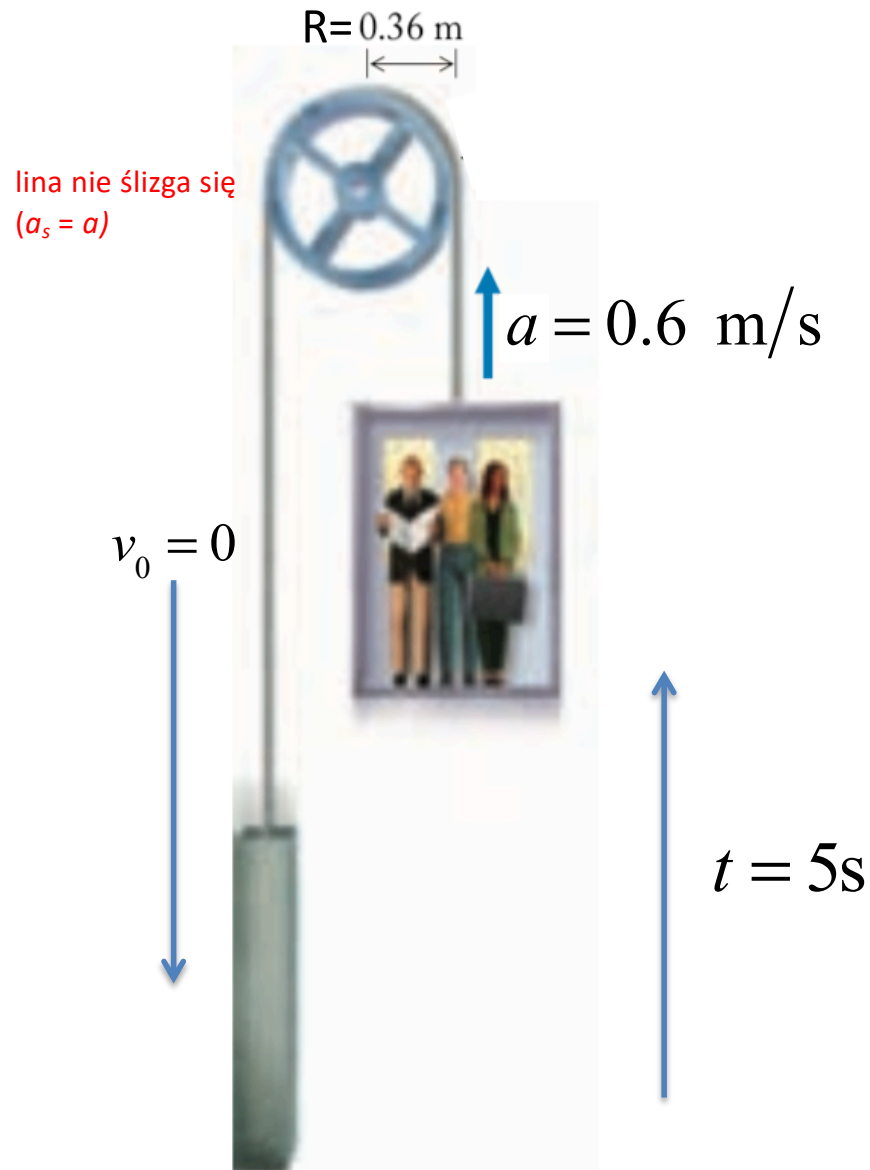
Innymi słowy do opisu ruchu obrotowego jednostajnie zmiennego (ze stałym przyspieszeniem kątowym) możemy stosować te same wzory jak do opisu ruchu prostoliniowego jednostajnie przyspieszonego wzdłuż linii prostej, zamieniamy tylko wielkości liniowe na wielkości kątowe:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_s t^2 \quad \longleftrightarrow \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$$

$$v = v_0 + a_s t \quad \longleftrightarrow \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$a_s = \text{const} \quad \longleftrightarrow \quad \varepsilon = \text{const}$$

Analogia pomiędzy ruchem prostoliniowym a obrotem ciała wokół stałej osi - przykład



Ile obrotów wykonało koło zamachowe w ciągu pierwszych 5 sekund ruchu? Jaką prędkość kątową osiągnęło w tym czasie?

$$\varepsilon = \frac{a_s}{R} = 1.7 \text{ rad/s}^2$$

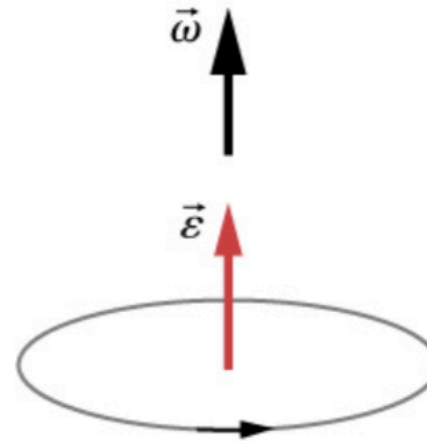
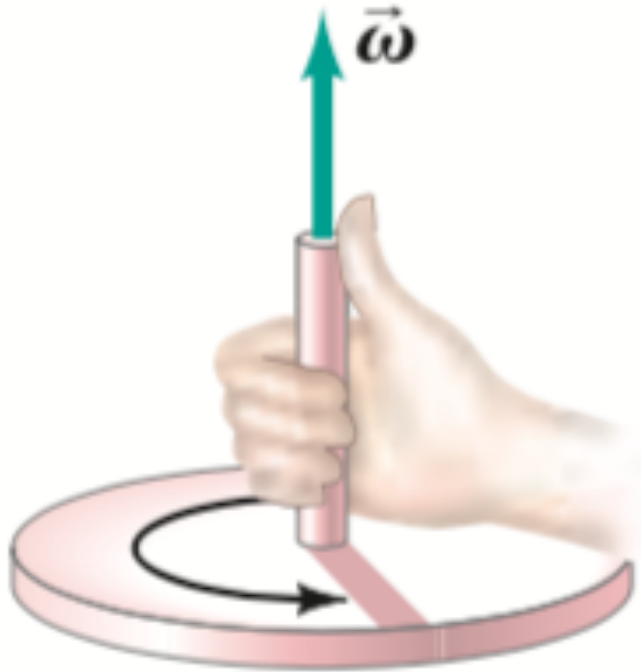
$$\theta = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 = 21 \text{ rad}$$

Liczba obrotów: $N = \frac{\theta}{2\pi} \approx 3.3$

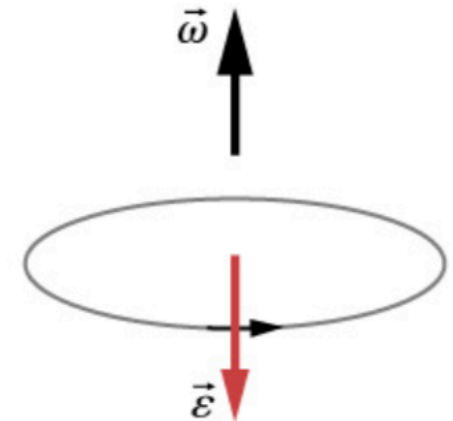
Końcowa prędkość kątowa:

$$\omega = \varepsilon t = 8.5 \text{ rad/s}$$

Wektorowa natura prędkości i przyspieszenia kąowego



(a) Obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, prędkość kątowa rośnie



(b) Obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, prędkość kątowa maleje

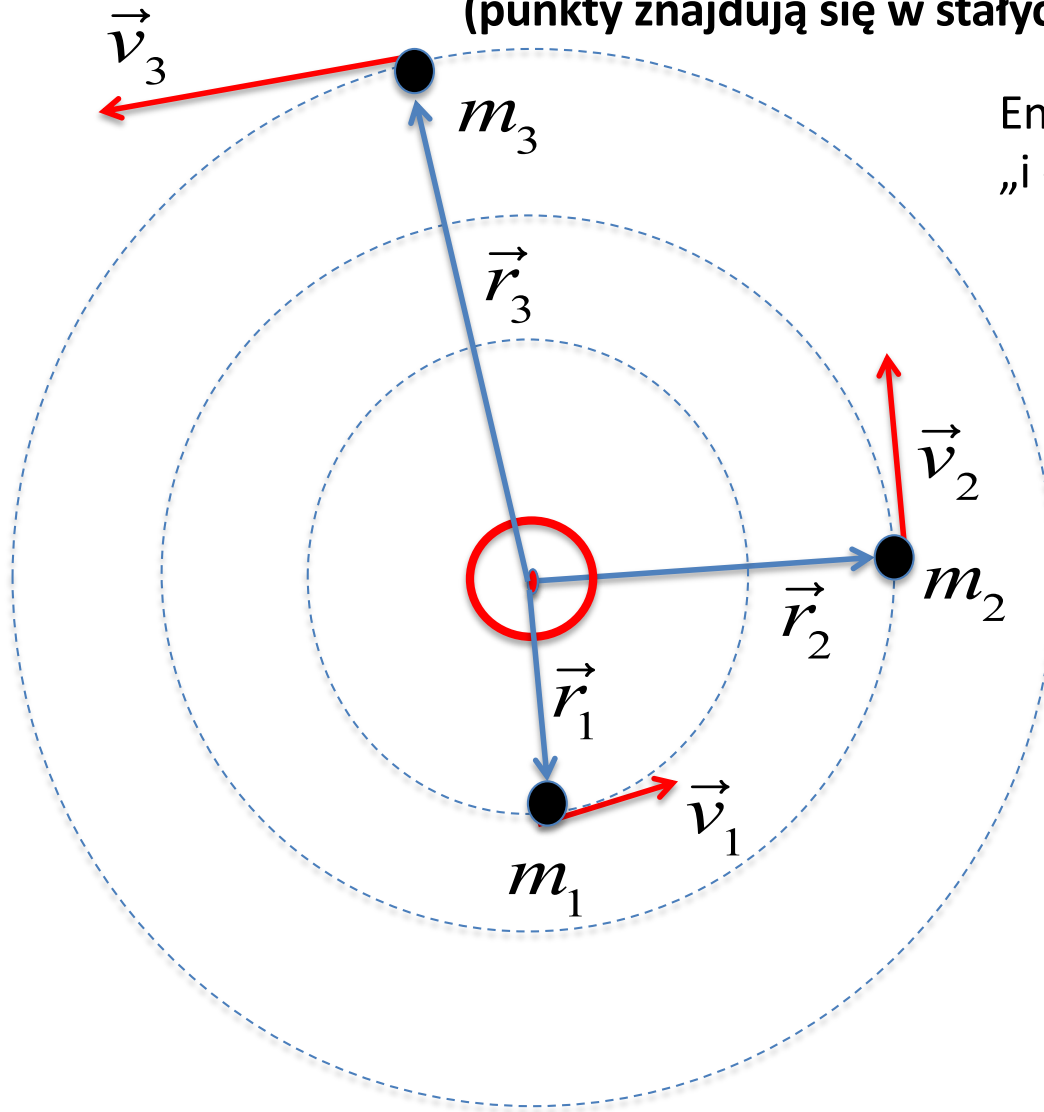
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

$$\vec{a}_s = \vec{\epsilon} \times \vec{R}$$

$\vec{R}$ - odległość od osi obrotu

Energia kinetyczna ruchu obrotowego układu punktów materialnych

(punkty znajdują się w stałych odległościach od siebie)



Energia kinetyczna „i - tego” punktu: $E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2$

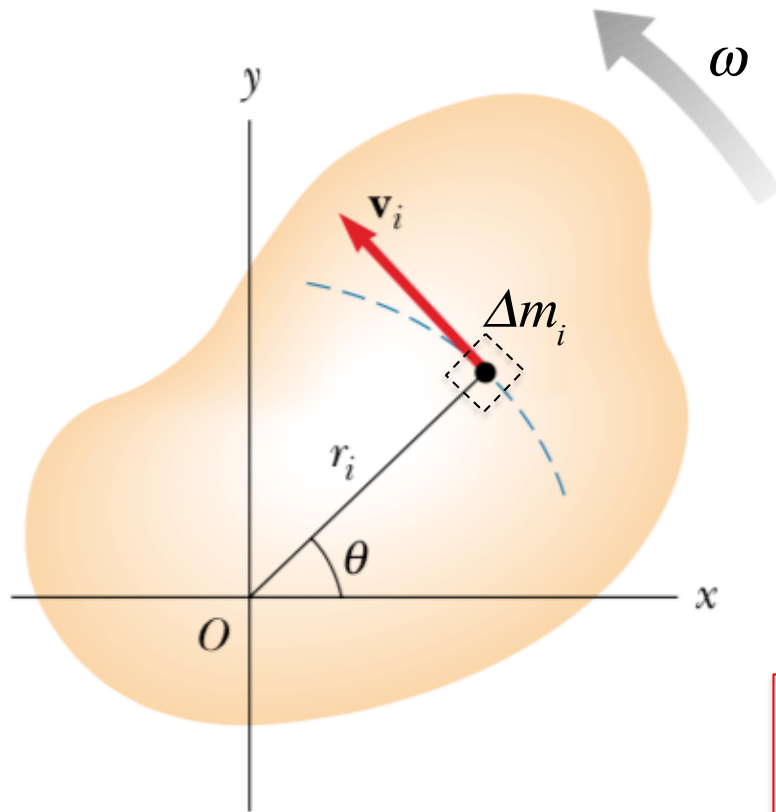
$$E_{k_ukladu} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_i^2$$

I moment bezwładności

Moment bezwładności układu n punktów:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Energia kinetyczna ruchu obrotowego ciała rozciągniętego



Energia kinetyczna elementu Δm_i :

$$E_{ki} = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i \omega^2 r_i^2$$

Energia kinetyczna całego ciała:

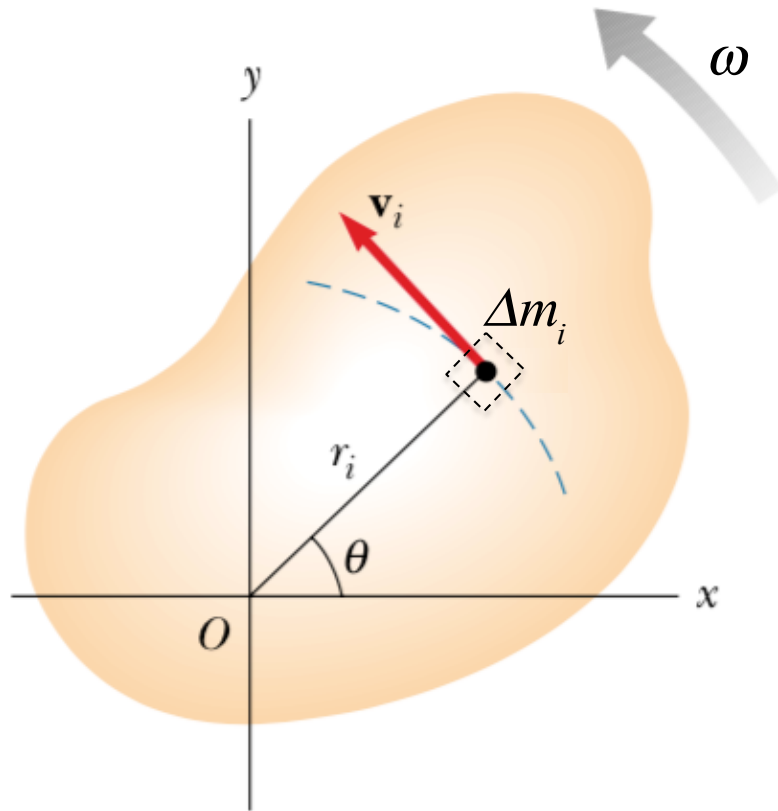
$$E_{k_cialo} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

$$E_{k_cialo} = \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

I_o moment
bezwładności

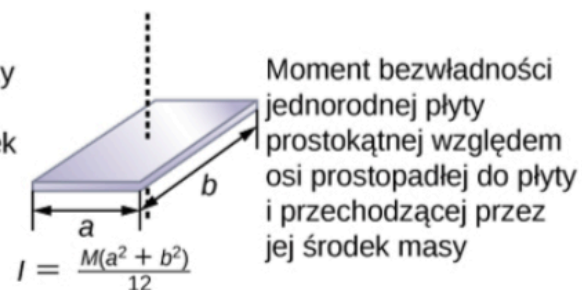
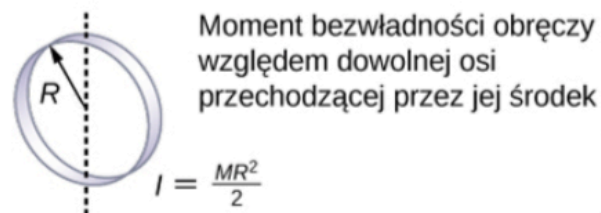
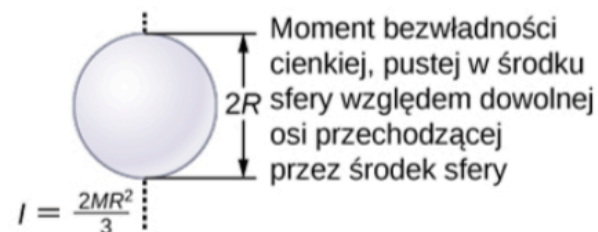
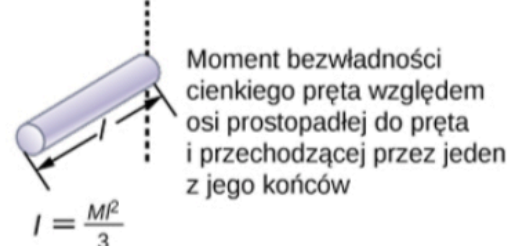
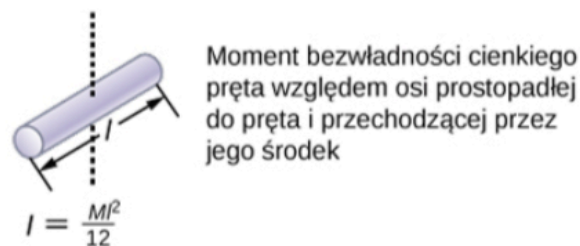
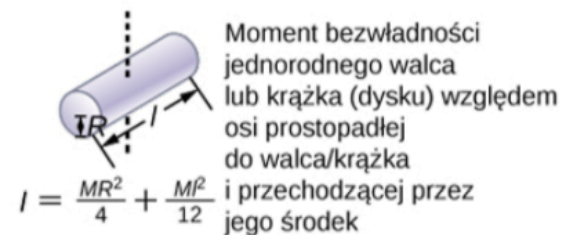
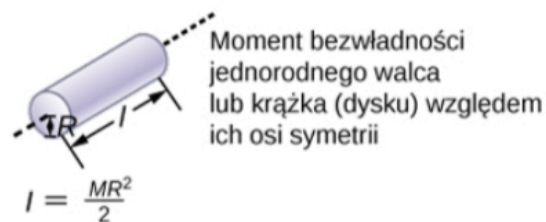
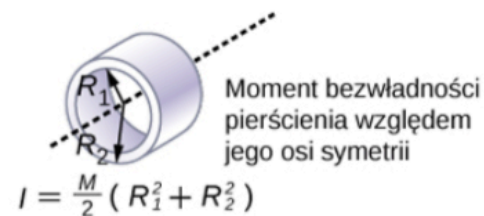
- Moment bezwładności w ruchu obrotowym jest odpowiednikiem masy w ruchu translacyjnym
- Moment bezwładności jest miarą oporu na zmiany obrotów, podobnie jak masa jest miarą oporu na zmiany ruchu
- Moment bezwładności zależy od położenia osi obrotu
- Energia kinetyczna ruchu obrotowego nie jest nowym rodzajem energii (jest to po prostu suma energii kinetycznych wszystkich cząstek ciała w ruchu obrotowym)

Moment bezwładności ciał rozciągłych – jak policzyć?

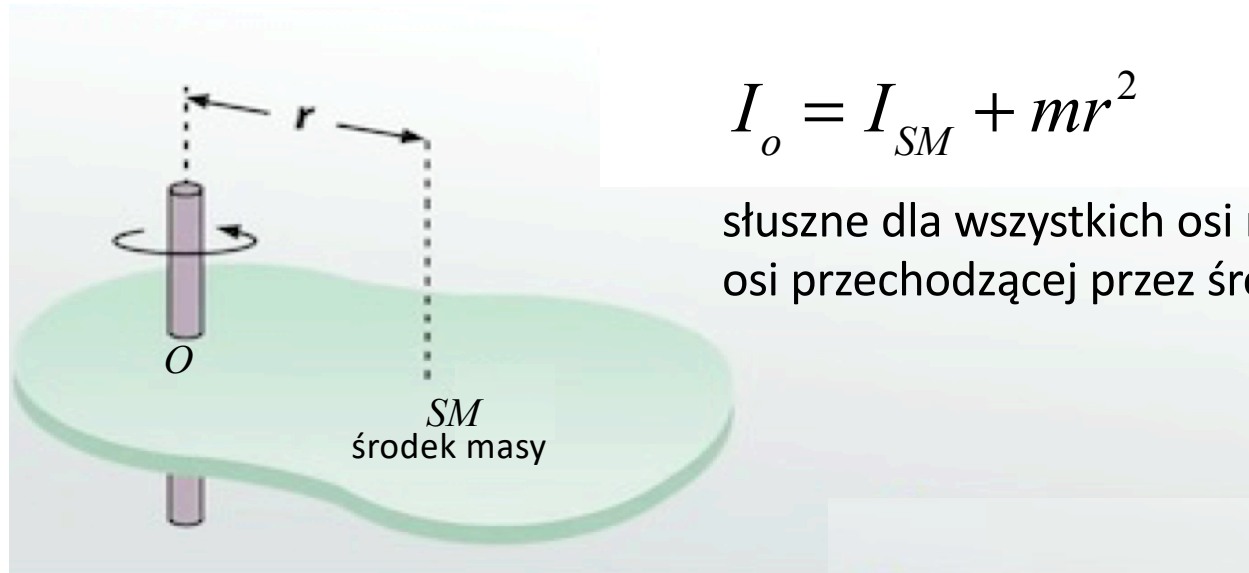


Przepis jak wyznaczyć (całki objętościowe):

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \Rightarrow_{\Delta m_i \rightarrow 0} I = \int r^2 dm$$

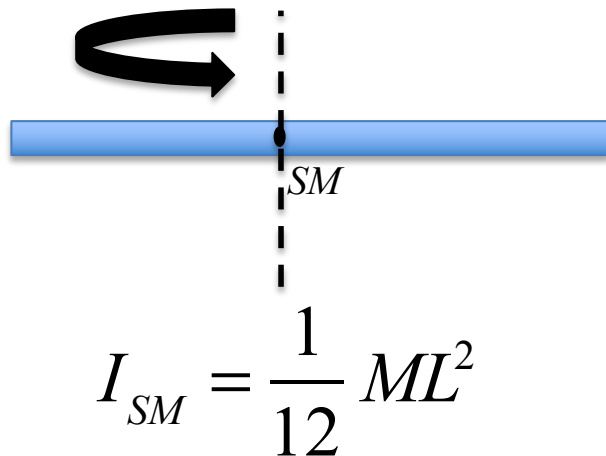


Twierdzenie Steinera

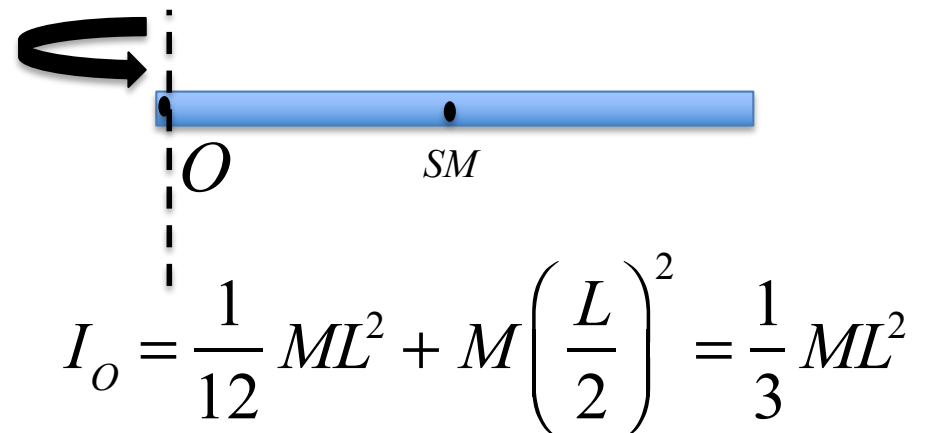


Przykład: rotujący jednorodny cienki pręt o długości L i masie M

obróć wokół osi
przechodzącej przez środek masy



obróć wokół osi
przechodzącej przez koniec pręta

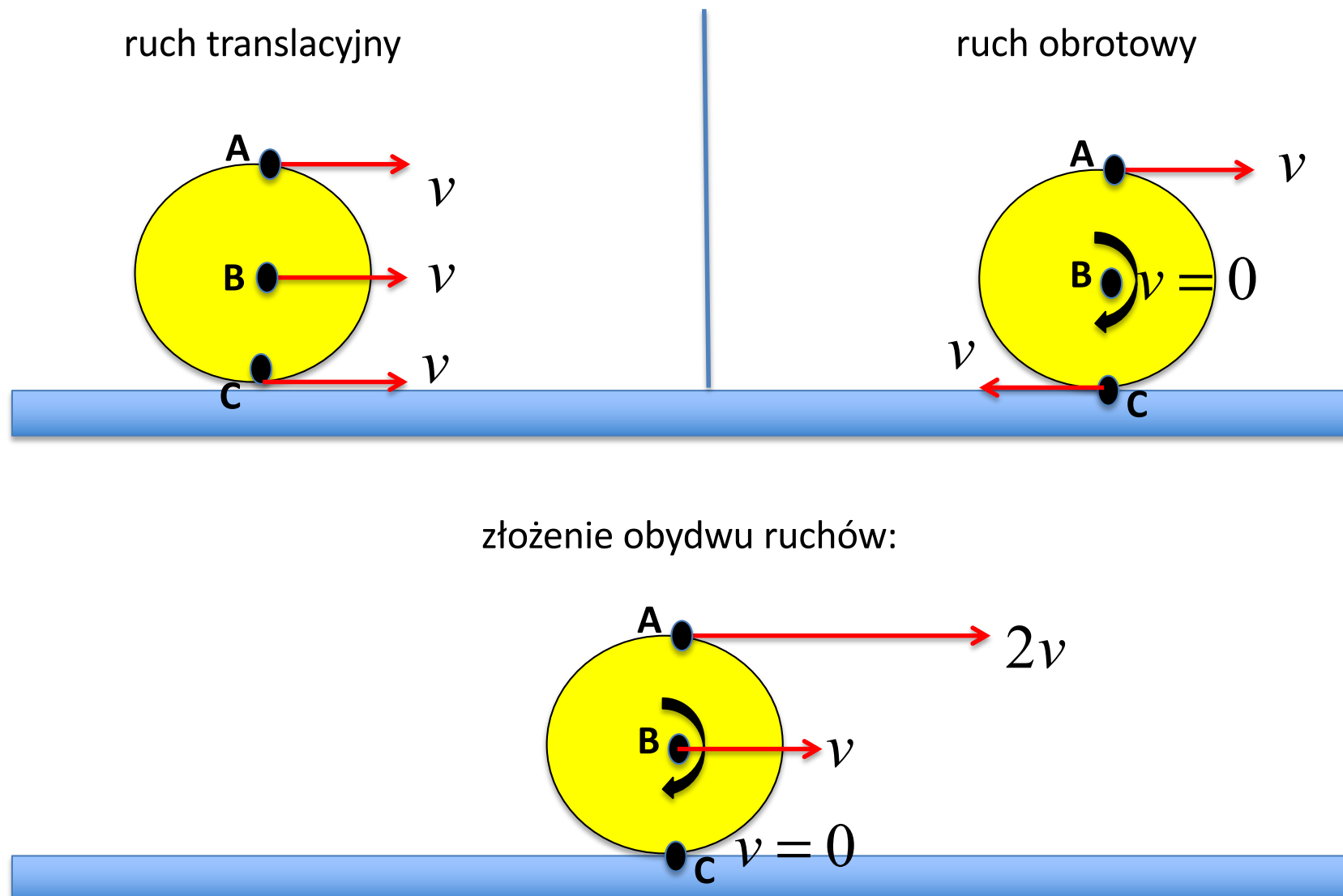


Ruch translacyjny i obrotowy bryły sztywnej – porównanie równań

Ruch postępowy (translacyjny)	Ruch obrotowy
• położenie, x • prędkość liniowa, $v = dx/dt$ • przyspieszenie, $a_s = dv/dt$ • masa, m • energia kinetyczna, $E_k = \frac{1}{2} mv^2$ • siła, $F = ma$ • pęd, $p = mv$	• kąt, θ • prędkość kątowna, $\omega = d\theta/dt$ • przyspieszenie kątowne, $\varepsilon = d\omega/dt$ • moment bezwładności, I • energia kinetyczna, $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$ • xxxxxx • xxxxxx

Toczenie się bez poślizgu

prędkość w ruchu translacyjnym = prędkość w ruchu obrotowym



Zasada zachowania energii

-kulka jest bryłą sztywną i należy uwzględnić energię kinetycznej ruchu obrotowego

Z jakiej wysokości h należy puścić kulkę, aby pokonała ona „pętlę śmierci” o promieniu R ?

Gdy kulka się nie obraca: $mgh = mg(2r) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow gh = 2gr + \frac{1}{2}gr \Rightarrow h = \frac{5}{2}r$

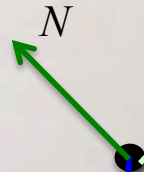
Gdy kulka obraca się bez ślizgania

(tj. prędkość obracających się punktów na obwodzie kulki jest równa prędkości całej kulki w ruchu translacyjnym):

$$mgh = mg(2r) + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow mgh = 2mgr + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\frac{v^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow gh = 2gr + \frac{1}{2}gr + \frac{1}{5}gr \Rightarrow h = \frac{27}{10}r$$

Siła zawsze prostopadła do przesunięcia – nie wykonuje pracy!



Tracie statyczne nigdy nie wykonuje pracy!

mg
Siła konserwatywna

R – promień kulki