3.7. Droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym

Wróćmy do przykładu samochodów Formuły 1 i zastanówmy się, jaką drogę przebył w czasie pierwszych dwóch sekund od startu samochód Ferrari, jeśli po tych dwóch sekundach jego prędkość wyniosła 72 km/h (czyli 20 m/s). Zadanie jest dość skomplikowane, a wynik nieco zaskakujący. Zrobimy to powoli.

1° Wyliczmy najpierw przyspieszenie *a* jako stosunek przyrostu prędkości do czasu, który minął od startu:

$$a = \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t} = \frac{20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\,\mathrm{s}} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

2° Jaką drogę mógł przebyć Ferrari w ciągu dwóch sekund, jeśli jego prędkość na końcu tych dwóch sekund wyniosła 20 m/s. Może 20 metrów? Chyba nie, bo startował z prędkością zerową. Jaką prędkość *średnią* mógł mieć Ferrari w *trakcie* tych dwóch sekund? Połowa wartości między prędkością początkową a końcową? Czyli średnia między 20 m/s a 0 m/s? 10 m/s? Okazuje się, że jest to nie tylko dobre oszacowanie, ale właśnie wartość dokładna[15].

3° Ile przebył samochód, jadąc 2 sekundy z prędkością średnią 10 m/s? Zgodnie z definicją prędkości średniej przebył drogę *s*:

$$s = \mathrm{v}_{\acute{s}r} \cdot \Delta t = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 2\,\mathrm{s} = 20\ \mathrm{m}.$$

Oczywiście 20 metrów!

4° A jaką drogę przebył w czasie następnych dwóch sekund ruchu (czyli w sekundzie trzeciej i czwartej)?

Na początku tych dwóch kolejnych sekund (czyli na początku trzeciej sekundy) prędkość nie była już równa zeru, ale wynosiła 20 m/s. A na końcu tego odcinka czasu prędkość wyniosła 40 m/s. Mnożąc prędkość średnią na tym odcinku czasu (30 m/s) przez 2 s, otrzymujemy 60 m. W ciągu drugiego (dwusekundowego) odcinka czasu Ferrari przebył 60 metrów.

5° A w czasie trzeciego odcinka dwusekundowego?

Odcinek ten Ferrari zaczynał z prędkością 40 m/s, a kończył z prędkością 60 m/s. W ciągu tych dwóch sekund przebył więc 100 metrów.

6° Jeśli zsumujemy te przebyte odcinki, otrzymamy 20 + 60 + 100 = 180 metrów.

Całe rozumowanie przedstawia też rysunek 3.14.

Powtórzmy to rozumowanie w punktach:

a) w ciągu dwóch sekund jazdy (t = 2 s) Ferrari przebył 20 m,

b) w ciągu czterech sekund jazdy (t = 4 s) Ferrari przebył 80 m,

c) w ciągu sześciu sekund jazdy (t = 6 s) Ferrari przebył 180 m.

---

[15] Uwaga dla nauczyciela: średnią arytmetyczną między wartością początkową i końcową danego przedziału czasu można w każdym przypadku interpolacji wykorzystywać do całkowania. Jest to tzw. całkowanie metodą trapezów. W przypadku funkcji liniowej, a to właśnie jest atrybut ruchu *jednostajnie* przyspieszonego, metoda trapezów daje wartość *dokładną* całki.

Start!

Minęło sekund 0 s 1 s 2 s 3 s 4 s 5 s 6 s

Upływa sekunda 1° 2° 3° 4° 5° 6°

Odcinki 2-sekundowe 1° 2° 3°

Prędkość „v” w danej chwili

$0\ \frac{m}{s}$ $20\ \frac{m}{s}$ $40\ \frac{m}{s}$ $60\ \frac{m}{s}$

Prędkość średnia „$v_{śr}$” na odcinku czasu

1° 2° 3°

$10\ \frac{m}{s}$ $30\ \frac{m}{s}$ $50\ \frac{m}{s}$

Droga przebyta w danym odcinku czasu $s = v_{śr} \cdot t$

20 m 60 m 100 m

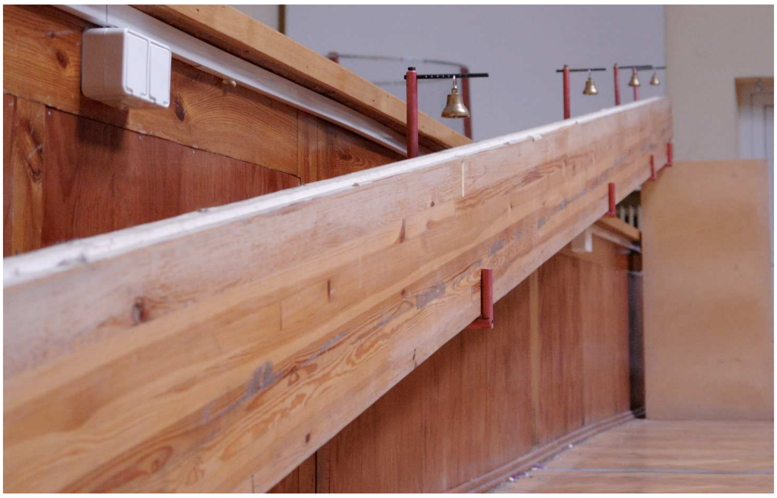
Cała droga przebyta w ciągu sześciu sekund 20 + 60 + 100 = **180 m**

Porównajmy ze wzorem $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot (6s)^2 = \frac{1}{2} \cdot 360\ m = 180\ m$ (dobrze!)

Rys. 3.14. Chronometraż startu Ferrari

W ruchu jednostajnie przyspieszonym przebyta droga *nie* jest proporcjonalna do czasu, który upłynął! Aby znaleźć zależność między s oraz t, podzielmy przebytą drogę przez 20 (metrów). Przebyte drogi mają się do siebie jak 1 : 4 : 9, czyli są kwadratami kolejnych liczb naturalnych. I to właśnie zauważył Galileusz. Pisał on: „jeśli w pierwszym czasie, ruszając ze stanu spoczynku, przebędzie określony odcinek, na przykład **jedną** długość lufy, w drugim czasie **trzy lufy**, w trzecim **pięć**, w czwartym **siedem**, i tak sukcesywnie w porządku kolejnych liczb nieparzystych”.

Zależność przebiegów w kolejnych sekundach ilustruje tzw. równia Galileusza, z dzwonkami ułożonymi we wzajemnych odległościach 1 : 3 : 5 : 7 : 9, zob. fot. 3.14. Dzwonki tak ułożone dzwonią w równych odstępach *czasu* (film w wersji internetowej poręcznika).



Fot. 3.14. Równia Galileusza – rekonstrukcja na UMK w Toruniu. Zauważ, że odległości między dzwonkami rosną i mają się do siebie jak kolejne liczby nieparzyste

Odległości między dzwonkami wynoszą 1; 3; 5; 7. A jaka odległość dzieli kolejne dzwonki od początku równi? To jasne! Pierwszy jest w odległości 1, drugi $1 + 3 = 4$, trzeci $1 + 3 + 5 = 9$, czwarty $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ itd. Liczby 1; 4; 9; 16 to *kwadraty* kolejnych liczb naturalnych. Sprawdźmy tę obserwację również na przykładzie Ferrari, gdzie przyspieszenie wynosiło $a = 10$ m/s²; możemy zauważyć, że wzór na przebytą drogę s jest następujący:

$$\boxed{s = \frac{1}{2} a \cdot t^2} \qquad (3.8.),$$

gdzie: t jest czasem, który upłynął od początku ruchu, a zaś jest przyspieszeniem.

Sprawdźmy wzór z danymi liczbowymi z przykładu:

Dane:
a = 10 m/s²,
t = 6 s.

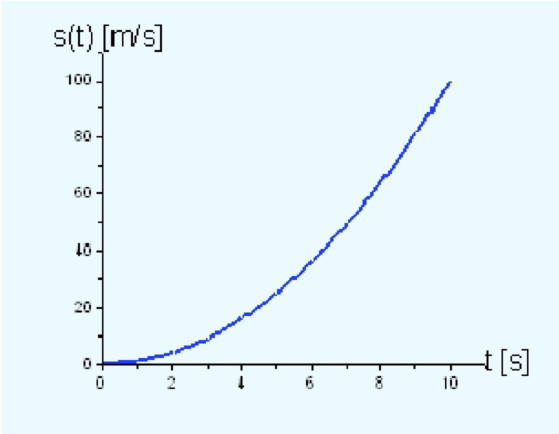
Obliczenie:

$$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (6\ \mathrm{s})^2 = \frac{1}{2} \cdot 360\ \mathrm{m} = 180\ \mathrm{m}$$ **(OK!).**

W ruchu jednostajnie przyspieszonym (z zerową prędkością początkową) przebyta droga jest proporcjonalna do ***kwadratu*** czasu, jaki upłynął od startu.

Zależność graficzna drogi od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym opisana jest krzywą zwaną parabolą[16], zob. rys. 3.15. Wykres prędkości w funkcji czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym, np. rys. 3.13., jest linią prostą, a wykres drogi – parabolą. Sporządzając (lub czytając) wykres należy zawsze dokładnie opisać osie układu współrzędnych. Linia prosta na jednym wykresie (zależności drogi od czasu) opisuje ruch *jednostajny*, na innym wykresie (zależności prędkości od czasu) – ruch *jednostajnie przyspieszony*.

[16] Kształt paraboli mają na przykład antena satelitarna, zwierciadło w reflektorze samochodowym, a także trajektoria ciała rzuconego poziomo (lub ukośnie).



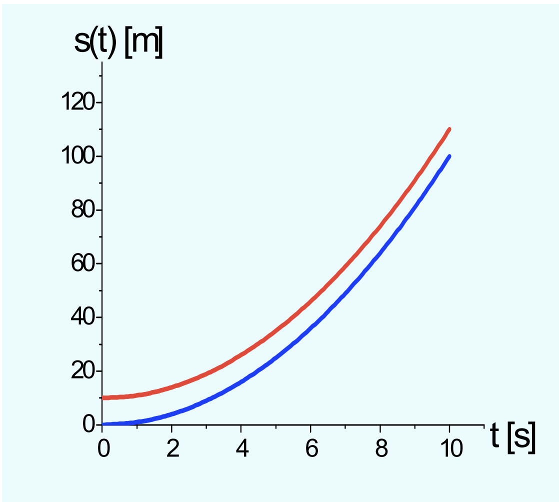
Rys. 3.15. Wykres zależności drogi od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym przedstawia krzywa zwana parabolą

Uwagi dla dociekliwych

Wzór (3.8.) stosuje się, o ile prędkość początkowa jest zerowa. Jeśli prędkość początkowa jest różna od zera, należy tę początkową prędkość uwzględnić w obliczeniach. Jak możemy wywnioskować z przykładu koralika wrzuconego do szybu kopalni, prędkość początkowa dodaje się w każdym momencie ruchu do prędkości, jaką miałoby ciało w spadku swobodnym. We wzorze na przebytą drogę musimy dodać więc składnik $v_0 t$. Jeśli dodatkowo w chwili początkowej ciało nie znajdowało się na początku skali odległości, musimy dodać tę odległość początkową s_0. Ostatecznie wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym przyjmuje postać:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \tag{3.9.}$$

Wykres zależności $s(t)$ nadal jest parabolą, ale różni się ona nieco od paraboli z rysunku 3.15. (zob. rys. 3.16.).



Rys. 3.16. Zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym z zerową prędkością początkową i zerowym przesunięciem początkowym (krzywa niebieska); zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym z niezerową prędkością początkową i niezerową przebytą odległością początkową (krzywa czerwona).