Przykład 2.2

Zapisz w notacji naukowej liczby R = 384 tys. km i E = 116,1 mld euro.

Rozwiązanie:

$R = 384 \cdot 10^3$ km $= 384 \cdot 10^6$ m
$E = 116{,}1 \cdot 10^9$ €

2.3. Obliczenia przybliżone

Wydatki Unii Europejskiej są znane z dużą dokładnością, bo sumują się na nie dokładne wielkości wydatków na poszczególne cele. I tak w budżecie 2009 roku na pomoc ekonomiczną dla gospodarek było przeznaczone 45 999 519 679 €, a na ochronę środowiska 52 566 129 680 €. Oczywiście, jeśli jeden z oddziałów („Dyrektoriatów") Unii nie potrafiłby ocenić własnych wydatków z dokładnością do jednego euro, cały budżet nie byłby spisany z taką dokładnością.

W fizyce, gdzie wielkości są z natury rzeczy prawie zawsze przybliżone[8], potrzebne są reguły działań matematycznych na liczbach przybliżonych. Podstawą tych reguł jest określenie, z jaką dokładnością znamy poszczególne składniki (w dodawaniu) lub czynniki (w mnożeniu) tych działań. Inne nieco reguły dotyczą dodawania, a nieco inne mnożenia.

W dodawaniu istotne jest, ile cyfr *po przecinku* (lub przed przecinkiem) znamy dokładnie. Spróbujmy na przykład policzyć, jaka powinna być masa jednej cząsteczki wody H_2O, która składa się z dwóch atomów wodoru i jednego atomu tlenu. Masa atomu wodoru (w jednostkach atomowych, j. at.) wynosi 1,0000245 j. at., a masa atomu tlenu 16,2458 j. at. Masę atomu wodoru znamy więc z dokładnością do 7 cyfr po przecinku, ale masę atomu tlenu zaledwie z dokładnością do 5 cyfr po przecinku. Masę cząsteczki wody możemy więc określić jedynie z dokładnością do 5 cyfr po przecinku.

W dodawaniu liczb przybliżonych istotna jest dokładność oceny każdego ze składników, tzn. ile cyfr ***po*** przecinku jest dokładnych. Suma liczb przybliżonych jest określona z taką dokładnością (tzn. zawiera tyle cyfr po przecinku), z jaką dokładnością jest znana najmniej dokładna liczba.

Przykład 2.3 dla przyszłych farmaceutów/farmaceutek

Umiejętność dodawania liczb przybliżonych jest potrzebna również np. w aptece.

I tak, jeśli jeden ze składników leku jest znany z dokładnością do 5 miejsc po przecinku, a drugi z dokładnością do 2 cyfr po przecinku, to i tak suma będzie określona z dokładnością do zaledwie 2 cyfr po przecinku.

Leki na serce muszą być podawane z dużą precyzją. Jeden z nich (atropina) jest podawany w dawkach po 0,1 miligrama, czyli 0,0001 grama. Jeśli jednak na opakowaniu leku znajdziemy informację, że zawartość „czynnika aktywnego" wynosi 0,1 miligrama, to zawartość ta nie może być określona z dokładnością mniejszą niż około 10%, czyli 0,01 miligrama. Zawartość leku możemy więc podać jako 0,00010 grama – z dokładnością do 5 miejsc po przecinku.

[8] Albert Einstein podobno powiedział, że dobry Bóg wymyślił tylko liczby naturalne, jak 1, 2, 3 a całą resztę, czyli liczby ułamkowe, pierwiastki itd. wymyślił człowiek. W fizyce jedynie „ilość atomów" jest liczbą naturalną, o ile potrafilibyśmy je zliczyć, a inne wielkości są liczbami przybliżonymi.

Trudno byłoby podać pigułkę o masie 0,1 mg (jest to mniej więcej ziarenko cukru pudru). Lek „aktywny" jest więc mieszany z innymi składnikami, „wypełniaczami", jak mąka ziemniaczana, celuloza itp. Typowe pigułki, niezależnie, czy są to witaminy czy leki na serce, mają masę 0,2±0,01 grama, co dla ścisłości zapiszemy jak 0,20 g. Masa wypełniacza, w gramach, jest więc określona z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku. Skład pigułki na serce jest więc następujący:

– składnik aktywny	0,000010 grama
– wypełniacz	0,20 grama
Razem 0,000010 g + 0,20 g =	0,20 g

Fot. 2.3. Pigułki są duże i kolorowe, a zawierają głównie cukier i mąkę ziemniaczaną

W mnożeniu (lub dzieleniu) dokładność wyniku zależy nie od ilości cyfr dokładnych po przecinku, ale od ilości *wszystkich* cyfr dokładnych w każdym z czynników, niezależnie od tego czy są one po, czy przed przecinkiem. Dokładność wyniku jest taka sama jak dokładność *najmniej* dokładnego z czynników (albo dzielnej lub dzielnika przy dzieleniu). Rozważmy taki przykład.

Przykład 2.4 dla przyszłych kierowców

Na stacji benzynowej wlano do zbiornika 50 litrów benzyny. Dokładność podziałki odmierzającej wynosi 10 ml (czyli 0,01 litra). Samochód przejechał dokładnie 658,154 km. Jakie jest zużycie paliwa na 1 km?

Rozwiązanie:

Dokładność podziałki 10 ml oznacza (dla fizyka), że wlano $V = 50{,}00 \pm 0{,}01$ litra. Ilość benzyny znamy więc z dokładnością czterech cyfr *znaczących*.

Długość przejechanej drogi, według słupków na drodze możemy określić z dokładnością nie gorszą niż 1 metr. Przejechana droga wynosi więc $s = 658{,}152 \pm 0{,}001$ km. Drogę tę znamy z dokładnością do sześciu cyfr znaczących.

Aby obliczyć zużycie paliwa na 1 km dzielimy ilość całkowitą benzyny przez ilość przejechanych kilometrów

$x = 50{,}00 : 658{,}152 = 0{,}07597029$ litra na kilometr.

Wynik ten jest jednak niepoprawnie zapisany! Podaliśmy aż 7 cyfr znaczących – 7597029 (zera przed „7" nie liczą się jako cyfry *znaczące*). Ilość paliwa znamy z dokładnością do czterech cyfr znaczących, dlatego w wyniku wolno nam podać jedynie 4 cyfry znaczące. Poprawne zapisanie wyniku będzie następujące:

$x = 0{,}07597$ litrów na kilometr.

Tak naprawdę, zarówno ilość wlanego paliwa, jak i długość przejechanej drogi (jak ją liczyć? kiedy zgaśnie silnik, czy kiedy samochód się zatrzyma?) jest określona z niewielką liczbą cyfr *znaczących*. Dlatego zużycie paliwa podaje się z dokładnością nie większą niż 2–3 cyfry znaczące. I tak w naszym przypadku zapisalibyśmy $x = 7{,}6$ litra na 100 kilometrów.

W ***mnożeniu*** liczb przybliżonych istotna jest ilość cyfr ***znaczących najmniej*** dokładnego czynnika. Iloczyn podajemy z dokładnością do tylu cyfr znaczących, ile zawiera ten czynnik.