2.2. Wielkości przybliżone

Stan finansów szkoły corocznie jest sprawozdawany do jej władz. Sprawozdanie to zawiera wpływy i wydatki, i podawane jest z dokładnością do jednej złotówki. Finanse wielkich fabryk samochodów, o wiele razy większe niż budżet szkoły, też są sprawozdawane z dokładnością do jednej złotówki (lub euro). Nawet wydatki całej Unii Europejskiej jako organizacji, w 2009 roku 116,1 miliarda euro, są sprawozdawane z tą samą dokładnością. Planowane wydatki Unii na rok 2009 to dokładnie 116 096 062 329 € .

Wielkości fizyczne podajemy w inny sposób niż budżet Unii. Wielkości te są prawie zawsze wynikiem pomiaru, a ten jest przeprowadzany z określoną *dokładnością*. I tak, z inną dokładnością mierzona jest odległość między słupkami na autostradzie – stoją one co 50 metrów i kilka centymetrów różnicy w ich dokładnym ustawieniu nie jest istotne. Z kolei, odległość Księżyca od Ziemi, mimo że ogromna (średnio 384 tys. km) jest mierzona z dokładnością lepszą niż 1 cm. Stąd wiemy, że Księżyc bardzo powoli, 3 cm na rok, ale nieuchronnie oddala się do Ziemi.

Dla jasnego podkreślenia, które wielkości znamy (lub powinniśmy znać) z dużą dokładnością, fizycy posługują się pojęciem *błędu* (lub raczej *niepewności* pomiaru). I tak zapis $x = 50{,}0 \pm 0{,}1$ m oznacza, że *niedokładność* w ustawienia słupka nie powinna przekraczać 10 centymetrów. Zapis $c = 299\,792\,458 \pm 1$ m/s oznacza, że prędkość światła znamy z dokładnością do jednego metra na sekundę.

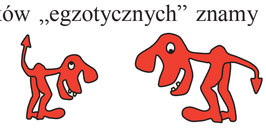
Porównując dokładność rozstawienia słupków z dokładnością wyznaczenia prędkości światła ta pierwsza wydają się być lepsza. W rzeczywistości jest inaczej. Dla oceny tych dwóch dokładności należy porównać wielkości *względne*. I tak słupki są rozstawione z dokładnością 0,1 części na 50 części, czyli 0,2 części na sto, czyli 0,2%. Prędkość światła znamy z dokładnością 0,00000033%. Dokładność współczesnego wyznaczenia stałej Plancka ($6{,}62606896 \cdot 10^{-34}$ J·s) wynosi 0,000005%.

Zadanie 2.1

Zaznacz na drzwiach swoją wysokość, a następnie zmierz tę zaznaczoną wysokość za pomocą miarki krawieckiej. Z jaką dokładnością (w centymetrach) jesteś w stanie zmierzyć tę wysokość? Ile wynosi niepewność *względna* w procentach (czyli stosunek niepewności wyrażony w centymetrach do twojej wysokości)?

Dokładność pomiaru

Jak zapisywać liczby, które nie są dokładne? Regułą stosowaną przez fizyków jest podawanie błędu pomiaru. Czasem te błędy mogą być zupełnie duże, w porównaniu z mierzoną wielkością. Dużą niepewnością obarczone są, na przykład, oszacowania (pomiary lub teoria) masy najmniejszych składników materii, cząstek elementarnych zwanych *kwarkami* (nazwa być może od serbołużyckiego „twaróg”). Masy dwóch kwarków, *up* i *down*, z których składa się prawie cała znana nam materia, znane są, we właściwych jednostkach, z dokładnością $1{,}5 < m_{up} < 5$ i $5 < m_{down} < 9$. O dziwo, masy kwarków „egzotycznych” znamy z większą dokładnością *względną*. I tak najcięższy z nich ma masę (w jednostkach 1000 razy większych) $m_{top} = 174{,}3 \pm 3{,}2$.



Fot. 2.2. Kwarki *down* mają nieco większą masę niż kwarki *up*. O ile większą, tego dokładnie nie wiemy © T. Wróblewski

Wynik jeszcze mniej dokładny, choć niezwykle ciekawy, dały doświadczenia przeprowadzone na początku XXI wieku dla sprawdzenia, czy czas może biec do tyłu (innymi słowy, czy koniecznie musimy się starzeć, czy też w niektórych przypadkach można „samoczynnie” odmłodnieć). Doświadczenia dotyczyły też kwarków, tak zwanych *dziwnych*.

Badania te wykazały, że *prawdopodobieństwo*, że czas zacznie biec do tyłu wynosi k = 3,0 ± 3,3 [6]. Jak widzicie, niepewność wyniku jest większa niż sam wynik! *Zmierzone* prawdopodobieństwo *odwrócenia* czasu wynosi więc ZERO!
Jak zapisywać liczby, o których wiemy, że ich dokładność jest ograniczona? Należy je *zaokrąglić*.

Reguły zaokrąglania liczb

Zaokrąglanie liczb polega na odrzuceniu cyfr, które uważamy za niedokładne lub nie są potrzebne w danym momencie. Dla przykładu, nie ma potrzeby podawania w każdym dokumencie dokładnego budżetu Unii Europejskiej 116 096 063 329 €. Dla potrzeb prasy wystarczy podać, że budżet ten wynosi 116 mld euro. W tym zaokrągleniu odrzuciliśmy wszystkie cyfry, oprócz pierwszych trzech.

Zaokrąglania liczb dokonuje się w dwojaki sposób, w zależności od tego, jaką wartość ma *pierwsza* z odrzucanych cyfr. Jeśli jest ona w zakresie od „0” do „4”, to wszystkie niepotrzebne cyfry są po prostu odrzucane. Jeśli natomiast pierwsza z odrzucanych cyfr ma wartość w zakresie od „5” do „9”, to *ostatnia* z zachowanych cyfr zostaje *zwiększona* o jeden.

Przykład 2.1

Zaokrąglić liczbę x = 12,848571 do a) trzech, b) pięciu, c) siedmiu cyfr znaczących[7].

Rozwiązanie:

a) czwartą cyfrą w podanej liczbie jest „4”. Zgodnie z podaną regułą odrzucamy więc pozostałe cyfry, pozostawiając x = 12,8.
b) szóstą cyfrą jest „5”. Zgodnie z regułą, zwiększamy o jeden piątą cyfrę. W tym przybliżeniu x = 12,849.
c) ósmą cyfrą jest „1”. Dla zaokrąglenia po prostu ją odrzucamy i otrzymujemy x = 12,84857.

Istnieje wiele sposobów na zapis tej samej liczby. Wybrany sposób często świadczy o dokładności liczby lub o celu, w jakim ją przedstawiamy. Pisząc, że Maria Curie-Skłodowska przerobiła własnoręcznie „półtora tony” rudy uranowej, mamy na celu podkreślenie wielkiego wysiłku przez nią włożonego, a nie dokładne „zważenie” tej rudy. W celu obliczenia, jak długo biegnie światło ze Słońca do Ziemi (odległej o 149 mln km), wystarczy przyjąć prędkość światła jako „trzysta tysięcy km na sekundę”. Stąd wynik: 500 sekund, czyli około 8 minut. Dobór sposobu zapisu jest szczególnie ważny, jeśli wielkości nie są dokładne, albo zmienne w czasie. I tak odległość Ziemi od Słońca wynosi 147 mln km w dniu 2 stycznia zaś 151 mln km w dniu 2 lipca. Rozsądniej jest więc podawać „mln km” niż podać wszystkie cyfry w kilometrach.

W szczególności dysponujemy tzw. *notacją* naukową, w której zamiast wielu zer na końcu liczby, podajemy po prostu ich ilość. Milion, czyli sześć zer, zapiszemy jako 10^6. I tak odległość od Słońca, 149 mln km, możemy zapisać jako $149 \cdot 10^6$ km lub lepiej, $149 \cdot 10^9$m.

[6] A. Angelopoulos i in., *A determination of the CPT violation parameter Re(δ) from the semileptonic decay of strangeness–tagged neutral kaons*, Physics Letters, B 444, 1998, 52-60.
[7] Za cyfry znaczące uważamy wszystkie, za wyjątkiem zer na początku liczby lub cyfr na końcu liczby, które należy odrzucić z uwagi na niepewność pomiaru.

Przykład 2.2

Zapisz w notacji naukowej liczby R = 384 tys. km i E = 116,1 mld euro.

Rozwiązanie:

$R = 384 \cdot 10^3$ km $= 384 \cdot 10^6$ m
$E = 116{,}1 \cdot 10^9$ €

2.3. Obliczenia przybliżone

Wydatki Unii Europejskiej są znane z dużą dokładnością, bo sumują się na nie dokładne wielkości wydatków na poszczególne cele. I tak w budżecie 2009 roku na pomoc ekonomiczną dla gospodarek było przeznaczone 45 999 519 679 €, a na ochronę środowiska 52 566 129 680 €. Oczywiście, jeśli jeden z oddziałów („Dyrektoriatów") Unii nie potrafiłby ocenić własnych wydatków z dokładnością do jednego euro, cały budżet nie byłby spisany z taką dokładnością.

W fizyce, gdzie wielkości są z natury rzeczy prawie zawsze przybliżone[8], potrzebne są reguły działań matematycznych na liczbach przybliżonych. Podstawą tych reguł jest określenie, z jaką dokładnością znamy poszczególne składniki (w dodawaniu) lub czynniki (w mnożeniu) tych działań. Inne nieco reguły dotyczą dodawania, a nieco inne mnożenia.

W dodawaniu istotne jest, ile cyfr *po przecinku* (lub przed przecinkiem) znamy dokładnie. Spróbujmy na przykład policzyć, jaka powinna być masa jednej cząsteczki wody H_2O, która składa się z dwóch atomów wodoru i jednego atomu tlenu. Masa atomu wodoru (w jednostkach atomowych, j. at.) wynosi 1,0000245 j. at., a masa atomu tlenu 16,2458 j. at. Masę atomu wodoru znamy więc z dokładnością do 7 cyfr po przecinku, ale masę atomu tlenu zaledwie z dokładnością do 5 cyfr po przecinku. Masę cząsteczki wody możemy więc określić jedynie z dokładnością do 5 cyfr po przecinku.

W dodawaniu liczb przybliżonych istotna jest dokładność oceny każdego ze składników, tzn. ile cyfr ***po*** przecinku jest dokładnych. Suma liczb przybliżonych jest określona z taką dokładnością (tzn. zawiera tyle cyfr po przecinku), z jaką dokładnością jest znana najmniej dokładna liczba.

Przykład 2.3 dla przyszłych farmaceutów/farmaceutek

Umiejętność dodawania liczb przybliżonych jest potrzebna również np. w aptece.

I tak, jeśli jeden ze składników leku jest znany z dokładnością do 5 miejsc po przecinku, a drugi z dokładnością do 2 cyfr po przecinku, to i tak suma będzie określona z dokładnością do zaledwie 2 cyfr po przecinku.

Leki na serce muszą być podawane z dużą precyzją. Jeden z nich (atropina) jest podawany w dawkach po 0,1 miligrama, czyli 0,0001 grama. Jeśli jednak na opakowaniu leku znajdziemy informację, że zawartość „czynnika aktywnego" wynosi 0,1 miligrama, to zawartość ta nie może być określona z dokładnością mniejszą niż około 10%, czyli 0,01 miligrama. Zawartość leku możemy więc podać jako 0,00010 grama – z dokładnością do 5 miejsc po przecinku.

[8] Albert Einstein podobno powiedział, że dobry Bóg wymyślił tylko liczby naturalne, jak 1, 2, 3 a całą resztę, czyli liczby ułamkowe, pierwiastki itd. wymyślił człowiek. W fizyce jedynie „ilość atomów" jest liczbą naturalną, o ile potrafilibyśmy je zliczyć, a inne wielkości są liczbami przybliżonymi.