*Grzegorz Karwasz, Grzegorz Osiński*

# TRYGONOMETRIA AKUSTYCZNA, CZ. 2

W poprzedniej części artykułu analizowaliśmy dźwięk wydawany przez kieliszek pocierany wilgotnym palcem[1] i flet. Przebieg obserwowany na oscyloskopie doskonale ilustrował sumę sinusów. Tym razem dzięki dwóm żeliwnym dzwonkom przyjrzymy się iloczynowi tych funkcji.

Zajrzyjmy na chwilę do wzoru na sumę sinusów przedstawioną jako iloczyn sinusa i cosinusa. Wydawałoby się, że zastąpienie sumy przez iloczyn nie wprowadza żadnych nowych elementów. Ba, łatwiej sinusy sumować niż je mnożyć. Ale nie zawsze! Wkrótce się o tym przekonamy.

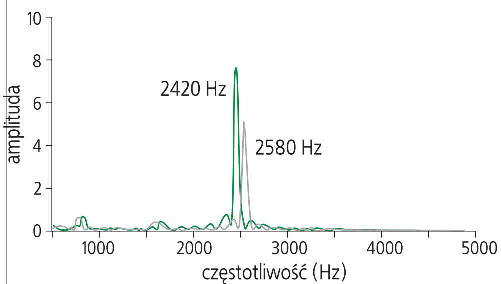
Potrzebne na lekcji dzwonki można kupić w sklepie dla majsterkowiczów, z tym że należy wybrać dwa o zbliżonym tonie. Najpierw uczniowie sami badają dźwięki. Robią to pozornie spontanicznie, ale w rzeczywistości absolutnie rygorystycznie. Uczniowie dzwonią jednym dzwonkiem (najwyżej trzy razy), po czym go wyciszamy, odkładamy i dajemy drugi dzwonek. Należy pilnie uważać, aby dzwonki nie zadźwięczały razem!

Po doświadczeniu z fletem młodzież potrafi już usłyszeć niewielką różnicę w częstotliwości. Teraz pokazujemy tę różnicę na ekranie komputera z uprzednio zarejestrowanego widma Fouriera: widać, że częstotliwości rzeczywiście niewiele się różnią. Rysunek 1 ilustruje dźwięki wydawane przez dzwonki, których częstotliwości wynoszą około 2580 Hz oraz 2420 Hz.

Wróćmy teraz do tablicy. Załóżmy, że sumujemy $\sin 20\alpha$ i $\sin 22\alpha$. Co uzyskamy? Pamiętając o wyrażeniu na sumę sinusów, możemy zapisać:

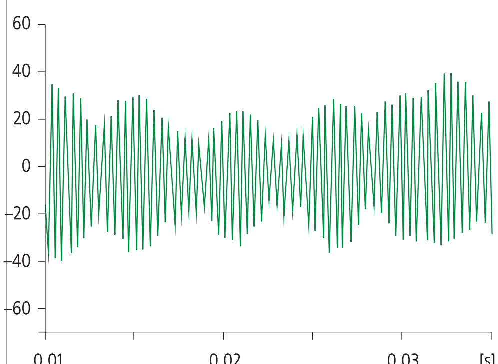
$$\sin 20\alpha + \sin 22\alpha = 2 \sin 21\alpha \cos \alpha$$

Próby narysowania na tablicy sumy nie dają jednoznacznego wyniku. Lepiej użyć formy iloczynowej: mnożymy sinus średniej częstotliwości przez cosinus połowy różnicy częstotliwości. Sinus średniej częstotliwości nie różni się wiele od sinusa częstotliwości składowych, ale cosinus jest swego rodzaju wolnozmienną obwiednią sinusa – ma dużo mniejszą częstotliwość. Czyli w dźwięku wytwarzanym przez oba dzwonki razem powinna się pojawić jakaś nowa, niska częstotliwość? Jakieś takie dudnienie basem? Spróbujmy!




Rys. 1. Wartości częstotliwości drgań dzwonków opisanych w doświadczeniu

Dopiero teraz pozwalamy zadźwięczeć oboma dzwonkami naraz. Rzeczywiście pojawia się niska częstotliwość: miły dla ucha dźwięk każdego z dzwonków pojedynczo zamienia się razem w przeraźliwą kakofonię. Możemy obejrzeć na ekranie oscyloskopu typowy przebieg dudnień (patrz rys. 2). Matematyka przewiduje zatem to, czego słuchając każdego z dzwonków oddzielnie, nie jesteśmy w stanie przewidzieć.




Rys. 2. Wynik mnożenia funkcji trygonometrycznych – dudnienia obserwowane przy równoczesnym uderzeniu obu dzwonków. Wyraźnie widoczna obwiednia funkcji trygonometrycznej

Na koniec warto jeszcze uświadomić uczniom, że analizą dźwięków zajmowali się już przed wiekami najwięksi myśliciele[2]. Pierwszy chiński flet z pięcioma rejestrami pochodzi z VII tysiąclecia p.n.e. Na cytrze o różnych długościach strun grano w Mezopotamii. Pitagorasa zdumiało, że niektóre liczby nie dają się przedstawić w postaci ilorazu liczb całkowitych (harmonicznych).

Ojciec Galileusza był lutnikiem, a on sam odkrył, jak częstotliwość struny zależy od jej długości, gęstości i siły naciągu. Newton wyjaśnił ten wzór, wprowadziwszy zasady mechaniki i rachunek różniczkowy. Fourier, oficer napoleoński, brał udział w wyprawie do Egiptu, o czym nie pamiętamy, wciskając w większości programów analizy danych klawisz „Fast Fourier Transform". Mechaniczne analizatory składowych harmonicznych wielkości sporych szaf budowali m.in. Thompson, Konig i Helmholtz. Nie mówiąc już o mechanice kwantowej, w której atom wodoru jest opisywany za pomocą „harmonik sferycznych", i chemii kwantowej, korzystającej – wzorem składowych Fouriera – z „ortogonalnych baz funkcji falowych".

[1] Zobacz także: http://modern.fizyka.umk.pl/new/Szammuzyka/szammuzyka.html.

[2] J. James, *Muzyka Sfer*, Kraków 1996.