Grzegorz Karwasz, Grzegorz Osiński

TRYGONOMETRIA AKUSTYCZNA, CZ. 1

W jaki sposób zilustrować sumowanie i mnożenie funkcji trygonometrycznych? Można wprowadzić na lekcji elementy eksperymentu przy wykorzystaniu programu komputerowego i rzeczywistych źródeł dźwięku. Dźwięk otrzymany przez pocieranie kieliszka to idealna sinusoida. Dźwięk fletu zawiera kilka częstotliwości harmonicznych, będących całkowitymi wielokrotnościami częstotliwości podstawowej – przebieg obserwowany na oscyloskopie to suma sinusoid.

Wirtualny oscyloskop

Nauczanie trygonometrii w szkole napotyka barierę pojęciową w momencie, kiedy funkcja kąta ostrego w trójkącie prostokątnym zostaje rozszerzona na zakres dowolnych kątów na osi rzeczywistej. Można co prawda pokazać doświadczalnie, że taka funkcja rosnąca, a następnie malejąca w czasie to na przykład rzut ruchu punktu materialnego po okręgu na oś położoną w płaszczyźnie tego ruchu (czyli na przykład ruch kamienia na sznurku oglądany z boku, zob.: film na stronie http://modern.fizyka.umk.pl/dzwieki/). Obejrzenie funkcji sinus na ekranie komputera nie budzi jednak u uczniów najmniejszego zdziwienia, gdyż przebiegi takie pokazują prawie wszystkie komputerowe programy nagrywające i odtwarzające muzykę. Wirtualny oscyloskop, który możemy znaleźć między innymi pod adresem http://www.zelscope.com/, jest niejako odmianą tych programów. Działa on we współpracy z mikrofonem komputera (najlepiej użyć mikrofonu zewnętrznego z ekranowanym kablem). Oscyloskop pokazuje wykres amplitudy fali w funkcji czasu (podstawę czasu można regulować), pozwala też na określenie częstotliwości składowych dźwięku, czyli na analizę harmoniczną. I znowu, analiza częstotliwości, czyli transformata Fouriera, nie budzi zdziwienia, gdyż większość wież hi-fi ma kolorowe, słupkowe wyświetlacze obrazujące tę analizę. Spróbujmy zatem wykorzystać technologiczne zabawki do wprowadzenia funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej, ale niejako kuchennymi drzwiami.

Istotną uwagą metodyczną przy korzystaniu z poniższego materiału jest w miarę ścisłe przestrzeganie określonego schematu działania: usłyszenie dźwięku, jego analiza na ucho, wizualizacja składowych za pomocą odpowiedniej opcji oscyloskopu, wzór trygonometryczny oraz jego analiza, a dopiero na końcu weryfikacja przebiegu fali jako funkcji czasu na ekranie oscyloskopu.

Szklanka i flet

Aby analizować dźwięk, potrzebny jest przede wszystkim generator fali akustycznej. W zasadzie nie ma z tym problemu

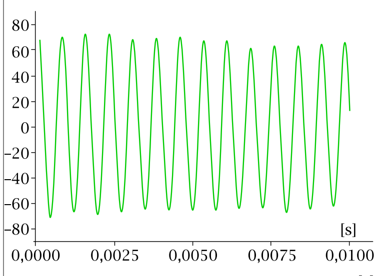
– można użyć komputera z kartą dźwiękową i kolumnami, a w laboratorium fizycznym przestrajalnego generatora funkcji sinus, wzmacniacza i głośnika, z tym że popełniamy w ten sposób tautologię – generujemy dźwięk 1000 Hz i obserwujemy w widmie również częstotliwość 1000 Hz.

Wydawałoby się, że źródłem fali sinusoidalnej może być drgająca struna lub organowa rura. Nic bardziej złudnego! Okazuje się wręcz, że to, co jest dla nas miłym dźwiękiem, jak na przykład dźwięk skrzypiec, jest całą mieszanką wielu częstotliwości harmonicznych[1], a fala taka nie przypomina w niczym przebiegu sinusoidalnego. Znakomitymi generatorami fal dźwiękowych o powtarzalnych cechach są zaś proste przyrządy, takie jak szklanka lub flet.

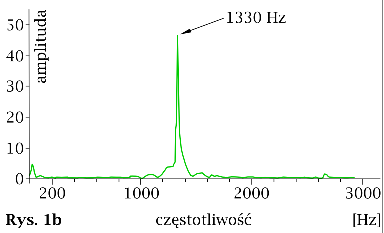
Lekcję trygonometrii doświadczalnej warto zacząć od ogólnego pokazania działania oscyloskopu wirtualnego, a następnie zobrazowania za jego pomocą jakiejkolwiek funkcji okresowej. Włączamy oscyloskop, wybieramy ucznia i prosimy go o zaśpiewanie „la"; potem prosimy o to innego ucznia. Jest z tym wiele zabawy – obserwowane przebiegi mają najróżniejsze kształty, ale sinusoidy nie przypominają w najmniejszym stopniu.

W poszukiwaniu czystego dźwięku posłużymy się kieliszkiem albo cienkościenną szklanką – lekko pocierając zwilżonym palcem górną krawędź naczynia. Kieliszek nie powinien stać na tym samym stole co mikrofon, aby wyeliminować powstawanie dodatkowego rezonansu pomiędzy nimi. Niezbędna jest chwila cierpliwości – wydaje się, że struktura szkła pamięta wytworzony dźwięk. Jeśli się nam uda, to na ekranie zaobserwujemy prawie idealną sinusoidę o częstotliwości około 1100–1300 Hz, która w niewielkim stopniu zależy od rodzaju szklanki, szkła itd. (patrz rys. 1a; nieco trójkątny kształt sinusoidy wynika z małej częstości próbkowania układu elektronicznego)[2]. Uwaga: na razie nie pokazujemy rysunku 1b! Zależność amplitudy dźwięku od czasu z rysunku 1a jest dobrze opisana funkcją $y(t) = A\sin(\omega t)$, gdzie $\omega = 2\pi f$. Aby znaleźć częstotliwość dźwięku f, należy sprawdzić, jaka jest wybrana skala osi x, odczytać z przebiegu na oscyloskopie okres sinusoidy, a następnie obliczyć częstotliwość zgodnie z zależnością $f = \frac{1}{T}$.

Wracamy do prób śpiewu i pokazujemy jeszcze raz, że generowany dźwięk jest często znacznie bardziej skomplikowany niż pisk szklanki. Aby uniezależnić się od emocji „generatora" (początkowa ciekawość uczniów szybko zamienia się w świetną zabawę), skorzystamy z plastikowego fletu, który można kupić w sklepie z towarami za 5 zł.



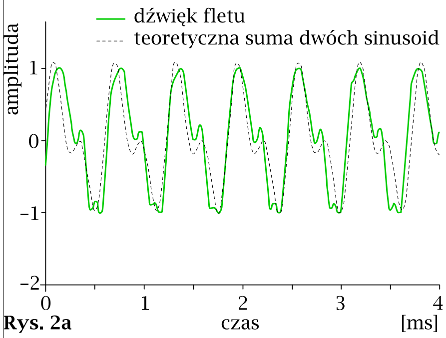
Rys. 1a



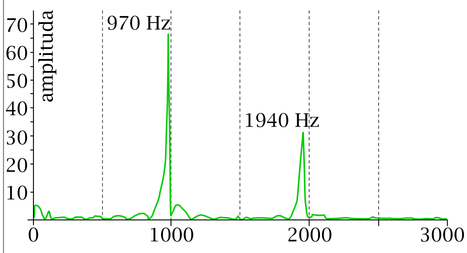
Rys. 1b

Przykład sinusoidy otrzymanej za pomocą oscyloskopu wirtualnego i kieliszka (pocieranego wilgotnym palcem po krawędzi)[3]. Rys. 1a. Zależność amplitudy dźwięku od czasu. Rys. 1b. Analiza harmoniczna (transformata Fouriera): obserwujemy tylko jedną składową o częstotliwości 1330 Hz.

Zaklejamy wszystkie otwory, pozostawiając otwarty tylko ten na końcu. Regulując siłę zadęcia i zamykając palcem (lub otwierając) otwór na końcu, możemy wygenerować 5–6 różnych częstotliwości[4]. Jeden z wygenerowanych przebiegów czasowych (należy dmuchać powoli i równo – warto to wcześniej przećwiczyć) pokazuje rysunek 2a.



Rys. 2a



Rys. 2b

Przykład analizy dźwięku otrzymanego za pomocą fletu. Widać wyraźnie dwie składowe częstotliwości; linia przerywana to krzywa teoretyczna otrzymana w wyniku sumowania dwóch sinusoid o częstotliwościach odpowiednio 970 Hz oraz 1940 Hz.

Jest to wyraźnie funkcja okresowa, choć nie wiemy jeszcze jaka. I tu, posługując się kredą i tablicą, przechodzimy do trygonometrii.

Kreda i tablica jako środek dydaktyczny

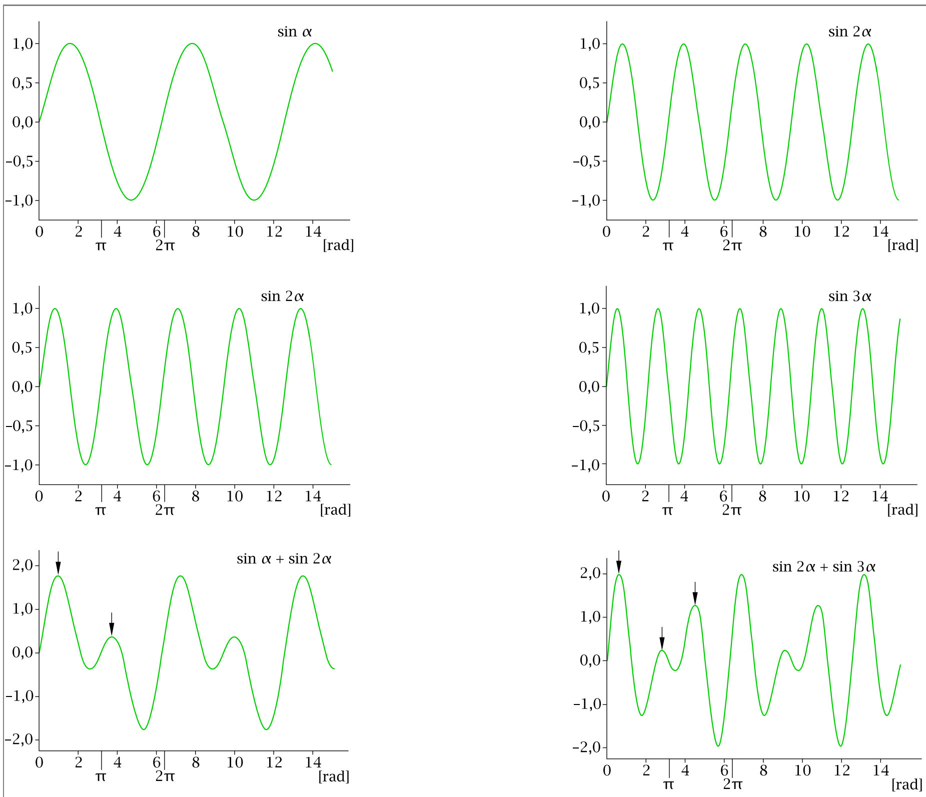
Stawiamy hipotezę roboczą, że generowany dźwięk to suma przebiegów sinusoidalnych. Sprawdźmy! Wykonujemy rysunki podobne do tych, które pokazano na rys. 3. Oczywiście można się ograniczyć do mniejszej liczby okresów, najważniejsze jest jednak to, aby sumowanie graficzne uczniowie przeprowadzili sami za pomocą kredy i linijki. Tak przeprowadzona analiza sumowania funkcji będzie bardzo przydatna w kolejnych przykładach doświadczalnych. Uczniowie po jej przeprowadzeniu zauważą, iż powstała nowa funkcja, która nie ma już tylko jednego okresu – wyraźnie widać, iż pojawił nowy okres i jakby podokresy; zgodnie z oczekiwaniami wzrosła amplituda funkcji wynikowej.

Już bez kredy i tablicy, z ekranu komputera możemy pokazać sumę funkcji $\sin 2\alpha + \sin 3\alpha$. Uczniowie widzą, że analiza częstotliwości składowych nie jest banalna – okres nowej funkcji nie wynosi ani 2α, ani 3α.

Analiza, bez Fouriera

Zasadnicze różnice w typie słyszanego dźwięku pozwalają nam na wprowadzenie, niejako niechcący, analizy harmonicznej za pomocą **transformaty Fouriera**. Pokazuje ona, jakie składowe harmoniczne i o jakiej amplitudzie zawiera analizowany dźwięk. Nie jest konieczne wprowadzanie pełnego formalizmu matematycznego: uczniowie odróżniają wyraźnie czysty, choć ostry dźwięk szklanki o jednej tylko składowej częstotliwości i inny, bardziej „miękki” dźwięk śpiewu lub fletu, o kilku częstotliwościach składowych[5].

Transformata Fouriera nie wchodzi oczywiście w zakres programu nauczania, ale dzisiaj, w dobie powszechnego użycia komputerów, jest przez uczniów bardzo często stosowana, zazwyczaj bez żadnej wiedzy teoretycznej, np. podczas konwersji plików dźwiękowych do formatu MP3. Wystarczy powiedzieć uczniom, że za pomocą takiej analizy można obliczyć z dowolnej funkcji



Rys. 3 Przykład graficznego sumowania funkcji sinus. Na wykresach sum funkcji trygonometrycznych zaznaczono punkty odpowiadające kolejnym częstościom składowym. Funkcje będące wynikiem sumowania wyraźnie mają kilka różnych okresów.

okresowej jej składowe podstawowe – nazywane właściwie harmonicznymi. Ogólnie, nasze ucho klasyfikuje jako dźwięki „harmoniczne” te, których częstotliwości mają się do siebie jak proste liczby całkowite, np. 2 : 1 (tzw. oktawa), 4 : 1 (podwójna oktawa), 4 : 3 (kwinta).

Jeszcze sto lat temu do analizy częstotliwości używano kolumny rezonatorów w postaci metalowych pustych kul o różnych wielkościach. Dziś po prostu włączamy drugi klawisz oscyloskopu wirtualnego, służący do analizy barwy dźwięku. Okazuje się, że widmo częstotliwości fletu z rysunku 2a zawiera tylko dwie składowe: ω i 2ω. Rzeczywiście, przebieg okresowy z rysunku 2a to suma dwóch funkcji sinus: mierzony przebieg pokrywa się w dość dobry sposób z funkcją otrzymaną na rysunku 3. Zwracamy uwagę na to, że na rysunku 3 sumowaliśmy dwie funkcje sinus o jednakowej amplitudzie, a w dźwięku fletu natężenie drugiej harmonicznej jest zaledwie połową natężenia częstotliwości podstawowej. Mimo to wynik „matematyczny” i „fizyczny” są do siebie podobne. To jest właśnie potęga trygonometrii – teoria potwierdzona rzeczywistym doświadczeniem.

Wracamy następnie jeszcze raz do doświadczeń z fletem i pokazujemy, że w zależności od sposobu zadęcia (silniej lub słabiej, z otwartym lub zamkniętym końcem) otrzymujemy inny dźwięk – zmieniają się okres i forma przebiegów na bardziej trójkątną lub kwadratowo-trójkątną (na przemian porównujemy widmo częstotliwości i przebiegi czasowe). Analiza Fouriera pokazuje, że w widmie pojawia się jeszcze kilka częstotliwości harmonicznych. Uczniowie na tym etapie powinni zrozumieć, że każda funkcja okresowa może być przedstawiona w formie sumy funkcji sinus (o odpowiedniej amplitudzie, częstotliwości i fazie)[6]. I na tym można by zakończyć lekcję sumowania sinusów, gdyby nie dwa dzwonki do drzwi – zwykłe, żeliwne, pociągane za sznurek. Ale o tym w następnym odcinku.

[1] G. Karwasz, E. Rajch, *Czarodziejski flet*, „Fizyka w Szkole" nr 1, 2006.

[2] Szczegółowy opis glass-harmoniki czytelnik może znaleźć w: E. Rajch, G. Karwasz, *Szampańska muzyka*, „Foton", Nr 85, lato 2004, s. 40–45.

[3] Wszystkie wykresy zamieszczone w niniejszym artykule powstały w ramach kursu powtórkowego z matematyki dla nowo przyjętych studentów fizyki, informatyki i astronomii na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu oraz przy okazji lekcji i wystaw dla studentów w innych krajach.

[4] Zobacz artykuł *Czarodziejski flet*.

[5] Więcej na ten temat w artykule *Czarodziejski flet*.

[6] Czytelników szczególnie zainteresowanych odsyłamy do przebiegów pokazanych w artykule *Szampańska muzyka*.