$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$E=mc^2$

$a^2+b^2=c^2$

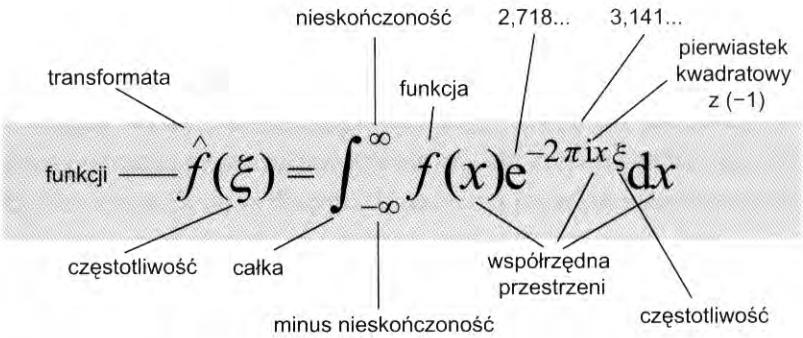
17 RÓWNAŃ KTÓRE ZMIENIŁY ŚWIAT

IAN STEWART

Prószyński i S-ka

Rozdział 9. Zmarszczki i pulsy

Transformata Fouriera



Co z niej wynika?

Każdą funkcję pojawiającą się w czasie czy przestrzeni można zapisać jako superpozycję funkcji sinusoidalnych o różnych częstotliwościach.

Dlaczego jest ona tak ważna?

Częstotliwości składowe pozwalają analizować kształt funkcji, porządkować je, wyciągać z nich istotne informacje i usuwać przypadkowe zakłócenia sygnałów.

Co dzięki niej osiągnęliśmy?

Transformata Fouriera ma wiele zastosowań – korzysta się z niej chociażby podczas przetwarzania obrazów, ale też w czasie rozwiązywania problemów mechaniki kwantowej. Dzięki niej jesteśmy w stanie badać budowę makrocząsteczek, na przykład DNA, kompresować dane tworzące cyfrowe obrazy, czyścić stare, zniszczone nagrania i badać trzęsienia ziemi. Ostatnimi czasy transformatę Fouriera wykorzystuje się także do tworzenia baz danych odcisków palców i przeszukiwania tych zbiorów oraz podczas analizy obrazów dawanych przez skanery medyczne.

Principia Newtona otworzyły uczonym drogę do matematycznego poznania praw rządzących naturą, ale krajanie wielkiego odkrywcy zatracili się w dysputach na temat praw pierwszeństwa do rachunku różniczkowego, przez co umknęła im szansa dostrzeżenia możliwości, jakie dawało jego wykorzystanie. W czasie gdy największe umysły Anglii wkładały całą swoją energię w odpieranie tego, co w ich mniemaniu było obrzydliwymi pomówieniami pod adresem najzdolniejszego matematyka w kraju – z których wiele zrodziło się z winy samego Newtona, zbyt chętnie słuchającego chcących dobrze, ale niezbyt rozgarniętych przyjaciół – matematycy pozostałych krajów europejskich skupili się na zastosowaniu koncepcji Newtona w innych dziedzinach fizyki: postanowili podjąć próbę opisania praw empirycznych wzorami. Niemal natychmiast po wyprowadzeniu równania falowego zdołano otrzymać analogiczne wzory dla pola grawitacyjnego, elektrostatyki, sprężystości i zagadnień związanych z przepływem ciepła. Wiele wzorów nazwano na cześć ich odkrywców; w ten sposób powstały równanie Laplace'a, równanie Poissona, ale w wypadku równania opisującego przepływ ciepła stało się inaczej. Wzór ten nosi niezbyt wymyślną, choć nie do końca trafną nazwę „równania przepływu cieplnego". Równanie to zapisał Joseph Fourier, a pomysł, który wykorzystał do wyprowadzenia wzoru, przyczynił się do rozwinięcia zupełnie nowej gałęzi matematyki znajdującej zastosowania w dziedzinach, o jakich Fourier nie mógł w ogóle śnić. Pomysł ten mógł równie dobrze przyjść mu do głowy w czasie prac nad

równaniem falowym, zrodziło się bowiem ono z podobnych założeń, ale historia zdecydowała, że poczeka na równanie przepływu cieplnego.

Nowa metoda zaczęła karierę całkiem obiecująco. W 1807 roku Fourier wysłał do Francuskiej Akademii Nauk pracę poświęconą zagadnieniu przepływu ciepła, w której wykorzystał nową metodę pochodnych cząstkowych. Mimo że szacowne grono odmówiło wydania artykułu, jego członkowie gorąco zachęcali Fouriera do rozwinięcia zawartych w nim myśli i ponownego przedstawienia ich do oceny. W tamtych czasach Akademia miała w zwyczaju wyznaczać rokrocznie nagrodę za badania dotyczące tematu, który uznano za najbardziej w danym momencie interesujący; w 1812 roku ogłoszono konkurs na najlepszy artykuł poświęcony zagadnieniom przepływu ciepła. Fourier, jak przewidywano, przesłał poprawione i rozszerzone omówienie i wygrał. Podane przez niego równanie przepływu cieplnego miało następującą postać:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

W tym wypadku funkcja $u(x,t)$ oznaczała temperaturę rozgrzanego, nieskończenie cienkiego pręta metalowego w punkcie o współrzędnej x w czasie t. Parametr α to stała zwana dyfuzyjnością cieplną. Jak widać, w rzeczywistości jest to raczej równanie temperaturowe. Fourier przedstawił też jego wersję wielowymiarową:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u,$$

spełnioną dla każdego wybranego miejsca na płaszczyźnie lub w przestrzeni.

Równanie przepływu cieplnego przypomina niepokojąco równanie falowe, chociaż różni je jeden zasadniczy szczegół. W równaniu falowym pojawiała się druga pochodna funkcji $\partial^2 u/\partial t^2$, natomiast w równaniu przepływu cieplnego występuje pierwsza pochodna funkcji po czasie: $\partial u/\partial t$. Zmiana ta wydaje się niewielka,

ale choć wizualnie nie jest imponująca, interpretacja fizyczna wzoru okazuje się zupełnie inna. Z równania wynika, że ciepło nie pozostaje w rozgrzanym pręcie w nieskończoność, co dotyczyło drgań w strunie – model matematyczny zakładał nieustanny ruch raz pobudzonej struny (w równaniu falowym nie pojawiały się czynniki narzucające tarcie czy mogące wymusić tłumienie). W tym wypadku zakłada się, iż z czasem temperatura pręta będzie spadać, ciepło rozproszy się, chyba że w układzie znajdzie się źródło, które zapewni dostarczanie mu nowej energii. Od razu też nasuwa się klasyczny problem do rozwiązania: określ, jak będzie się zmieniała temperatura wewnątrz pręta, którego jeden koniec będzie stale podgrzewany, a drugi stale chłodzony, tak by temperatura na krańcach pręta się nie zmieniała. Odpowiedź jest następująca: temperatura zmienia się zgodnie z funkcją wykładniczą. Innym typowym zadaniem z tej dziedziny jest badanie zmiany w czasie podanego początkowego rozkładu temperatury wewnątrz pręta. Przyjmijmy, że lewa połowa pręta ma wyższą temperaturę niż jego prawa połowa. Równanie po rozwiązaniu dla takich warunków początkowych powie nam, w jaki sposób ciepło przepływa z lewej strony pręta do prawej.

Najbardziej interesującym aspektem rozprawy Fouriera było nie samo rozwiązanie, lecz sposób, w jaki uczony do niego dotarł. Gdyby początkowy rozkład temperatury był opisany funkcją trygonometryczną, na przykład $\sin x$, rozwiązanie równania nie sprawiałoby większych trudności (oczywiście tym, którzy mają w tej kwestii pewne doświadczenie). W takim razie wynik przedstawiałby się w postaci funkcji $e^{-\alpha t} \sin x$. Przypomina ona nieco funkcje opisujące mody podstawowe równania fali, z tym że tamte wzory miały postać $\sin ct \sin x$. Tu czynnik $\sin ct$, opisujący poprzednio niekończące się drgania struny, został zastąpiony wyrazem wykładniczym. Minus pojawiający się w wykładniku, $-\alpha t$, informuje nas, że temperatura spada w sposób wykładniczy w tym samym tempie w całym pręcie. (Z punktu widzenia fizyki drgająca struna nie oddaje energii, a stygnący metalowy pręt pozbywa się jej w postaci ciepła). Gdyby zaś rozkład temperatury w pręcie

był opisany funkcją sin $5x$, rozwiązaniem byłaby funkcja $e^{-25\alpha t}$ sin $5x$, co oznacza znacznie szybszy spadek temperatury. Wartość 25 pojawiająca się w wykładniku to 5^2. W ten sposób właśnie formułuje się rozwiązania dla rozkładu temperatury zadanego ogólnym wzorem sin nx lub cos nx*. Aby rozwiązać równanie przewodnictwa cieplnego dla takich funkcji rozkładu, wystarczy pomnożyć je przez czynnik $e^{-n^2\alpha t}$.

Dalsze rozważania dotyczące równania przewodnictwa cieplnego przypominają wywód, jaki prowadziliśmy dla równania falowego.

Równanie przewodnictwa cieplnego jest liniowe, można więc mówić o rozwiązaniu będącym superpozycją funkcji. Jeżeli rozkład początkowy jest zadany funkcją postaci:

$$u(x,0) = \sin x + \sin 5x,$$

to rozwiązanie będzie opisane następującym wzorem:

$$u(x,t) = e^{-\alpha t} \sin x + e^{-25\alpha t} \sin 5x,$$

a każdy mod będzie gasnąć w innym tempie. Jednak doświadczenia pokazały, że tego rodzaju rozkłady temperatur są bardzo sztuczne. Aby rozwiązać wspomniany wcześniej problem, potrzebowalibyśmy funkcji rozkładu temperatury, która gwarantowałaby spełnienie następującego warunku początkowego: $u(x,0) = 1$ w jednej połowie pręta i -1 w drugiej jego połowie. To tak zwana funkcja nieciągła, opisana falą prostokątną, jak nazywają ją inżynierowie. Z kolei funkcje sinus i cosinus są ciągłe, żadna ich superpozycja nie może więc dać fali prostokątnej.

---

* Załóżmy, że $u(x,t) = e^{-n^2\alpha t} \sin nx$. Wtedy:

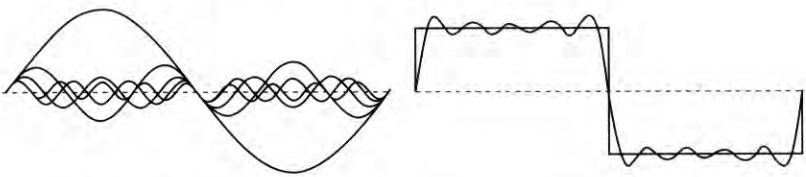
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -n^2\alpha e^{-n^2\alpha t} \sin nx = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Stąd $u(x,t)$ spełnia równanie przewodnictwa cieplnego.

W każdym razie żadna skończona superpozycja, ale gdyby zsumować ze sobą *nieskończenie wiele* wyrazów? Wówczas moglibyśmy się pokusić o wyrażenie pierwotnej funkcji rozkładu w postaci szeregu nieskończonego postaci:

$$u(x,0) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots$$

dla odpowiednio dobranych parametrów $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots, b_1, b_2, b_3 \ldots$ (Nie ma czynnika b_0, bo *sin* $0x = 0$). Wydaje się, że w ten sposób da się uzyskać falę prostokątną (patrz rysunek 40). W poszukiwanej sumie większość współczynników będzie musiała przyjąć wartość 0, potrzebne będą tylko b_n dla nieparzystych n zadane wzorem $b_n = 8/n\varpi$.



Rysunek 40. Sposób uzyskiwania fali prostokątnej z superpozycji funkcji sinus i cosinus. Z lewej: Składowe fali sinusoidalnej. Z prawej: Ich suma i fala prostokątna. Wykres przedstawia kilka pierwszych wyrazów szeregu Fouriera. Wprowadzenie do sumy dalszych wyrazów podniosłoby jakość przybliżenia fali prostokątnej.

Fourier podał nawet ogólne wzory potrzebne do wyznaczania współczynników a_n i b_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Po długim i żmudnym przedzieraniu się przez gąszcz rozwinięć szeregów potęgowych funkcji trygonometrycznych Fourier uświadomił sobie, że istnieje znacznie prostszy sposób uzyskania wzorów opisujących współczynniki stojące przy wyrazach szeregu nieskończonego. Jeśli weźmiesz dwie różne funkcje trygonometryczne,

na przykład cos $2x$ i sin $5x$, pomnożysz je przez siebie, a następnie scałkujesz w granicach od 0 do 2ϖ, otrzymasz zero. Zależność ta zachodzi nawet dla funkcji postaci cos $5x$ i sin $5x$. Jeżeli jednak funkcje będą identyczne – na przykład obie równe sin $5x$ – całka ich iloczynu będzie niezerowa; wynikiem całkowania natomiast ϖ. Jeżeli zaś wyjdziesz z założenia, że $f(x)$ jest sumą szeregu trygonometrycznego, pomnożysz wszystko przez sin $5x$ i scałkujesz w odpowiednich granicach, znikną wszystkie wyrazy sumy poza tym, który zawiera sin $5x$, czyli b_5 sin $5x$. Dla tego wyrazu całka wyniesie ϖ. Aby otrzymać wzór Fouriera na wartość współczynnika b_5, wystarczy teraz wykonać odpowiednie dzielenie. Proces ten można przeprowadzić oczywiście dla wszystkich innych współczynników.

Tout tremble

Zobacz też

Wszystko gra