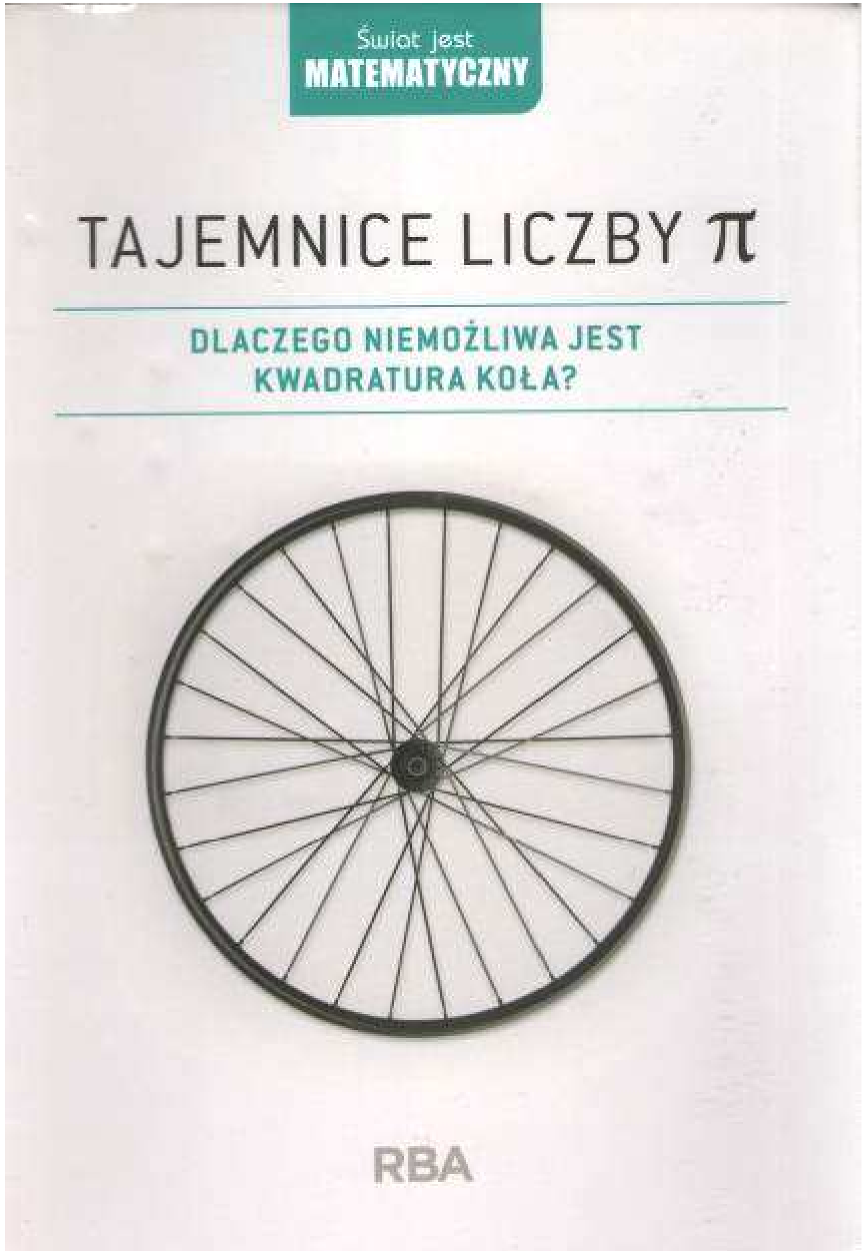
Kwadratura koła

Grzegorz Karwasz

Toruń, 2018. 3.14 15:92:65



Einstein: „Dobry Pan Bóg…”

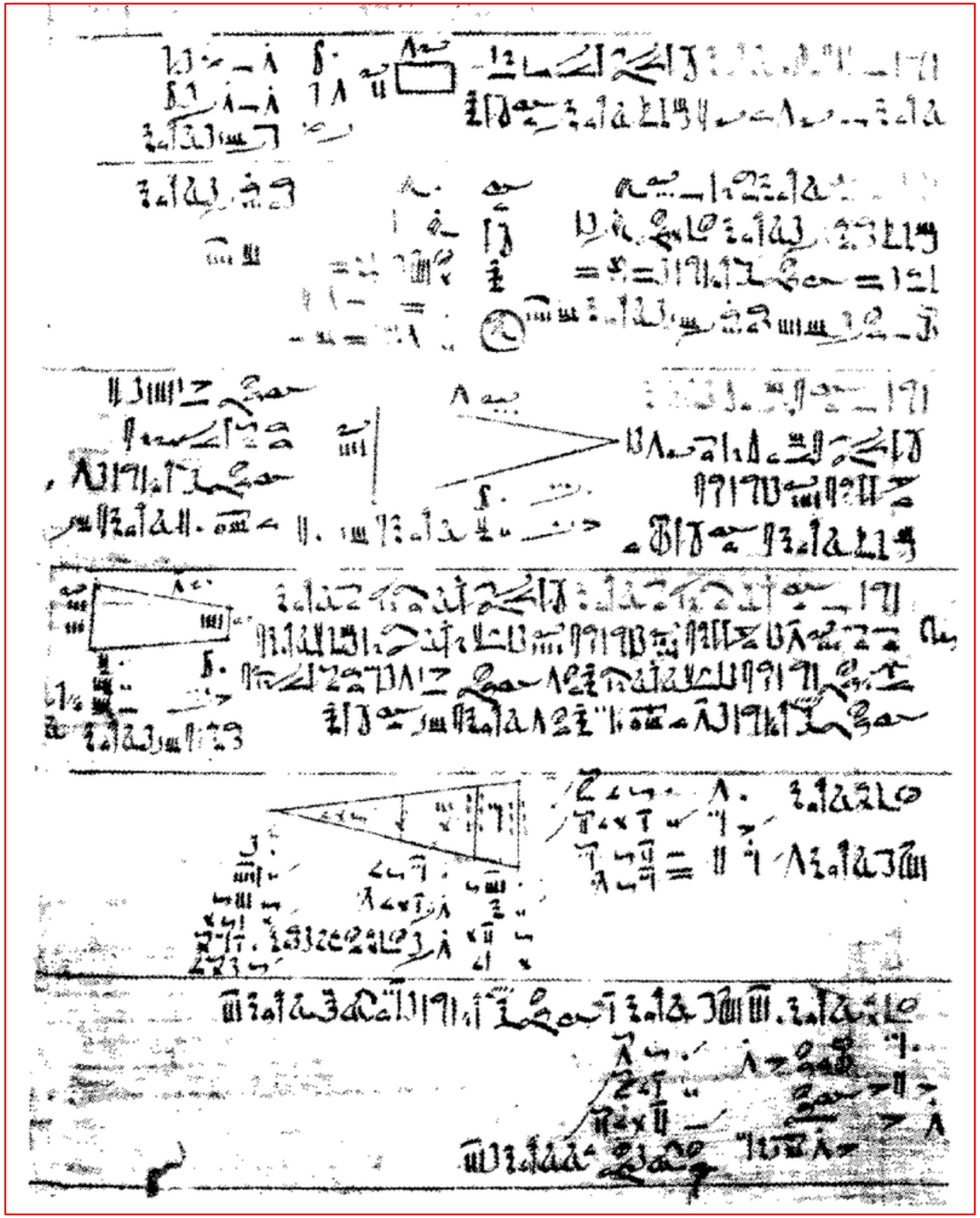
- Dobry Pan Bóg wymyślił liczby naturalne: 1,2,3, dziesięć, sto, tysiąc i jeszcze większe, np.:
- „do krocset kroci tysięcy fur beczek furgonów, milijonów (diabłów!, bo jakem Maciej)”
- Jabłka, kamienie, atomy, liczy się w liczbach naturalnych.
- W matematyce rzymskiej nie było zera (bo jak czegoś nie ma , to nie ma).
- I wszystko szło dobrze, do czasów niejakiego Pitagorasa (VI wiek przed n.e.)
- Ale zacznijmy od początku…

Już 4 tysiące lat temu…

- W starożytnym Egipcie (i na pewno też w Mezopotamii) ludzie wymyślili matematykę: trzeba było sprawiedliwie dzielić poletka wzdłuż Nilu (i obliczać podatki)

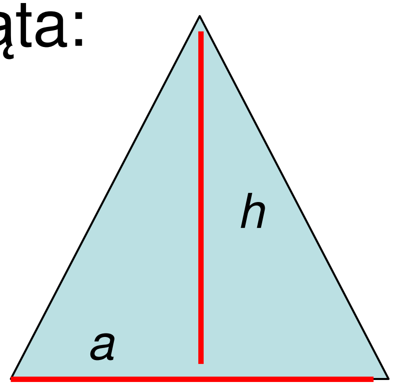
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/62/Ziggarut_of_Ur_-_M.Lubinski.jpg

Papirus Rhind (~1550 p.n.e)



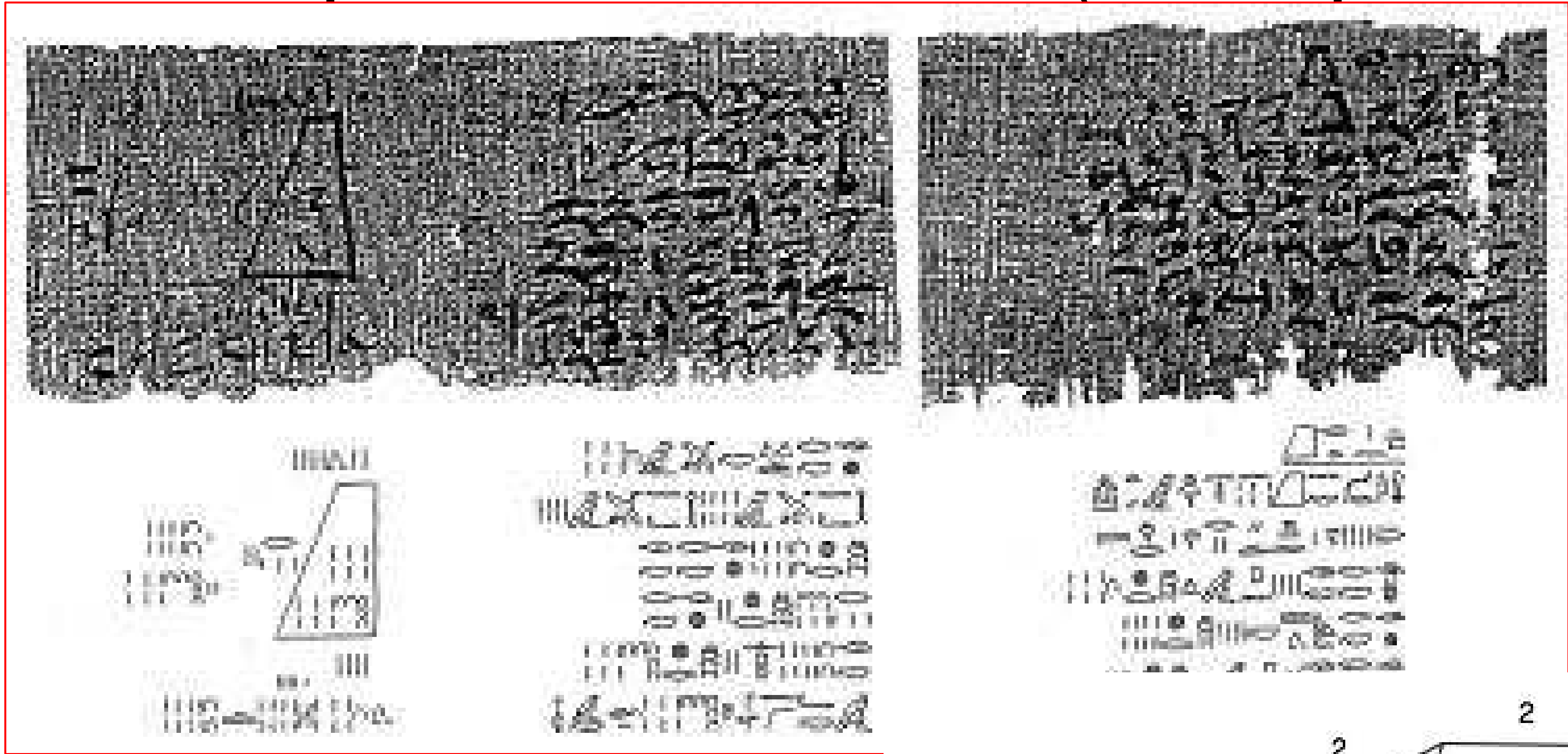
Dodawanie ułamków:
$2/15 = 1/10 + 1/30$

Pole trójkąta:
$P = 1/2\ a \cdot h$

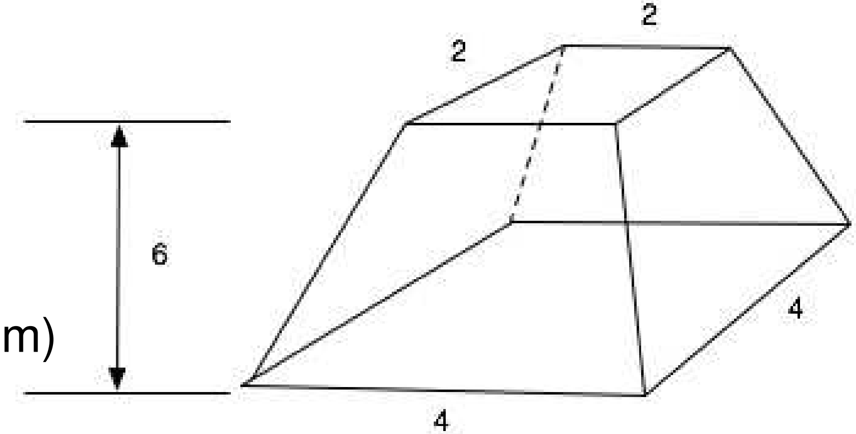


By Unknown - British Museum, EA10057, Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=144957

Papirus moskiewski (1850 p.n.e.)



$$V=1/3\ h\ (a^2 + ab + b^2)$$



Jak uwarzyć dobre piwo? (Pefsu problem)

By Unknown - Struve, Vasilij Vasil'evič, and Boris Turaev. 1930. Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik; Abteilung A: Quellen 1. Berlin: J. Springer, Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6309027

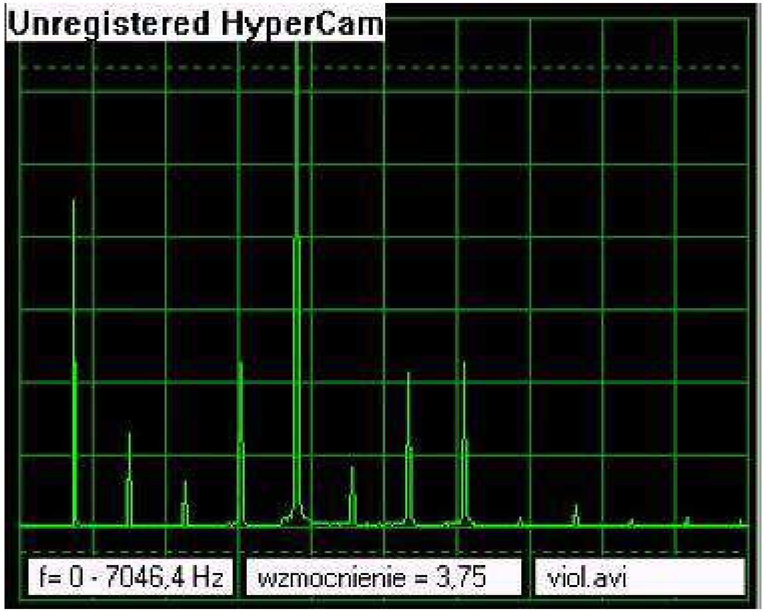
By Stumps - wikimedia, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4997129

Pitagoras z Samos

„Liczba jest istotą wszystkich rzeczy” [wiki.pl]

- Pitagoras zajmował się dwoma zagadnieniami:

1) muzyką (i tu szło dobrze)



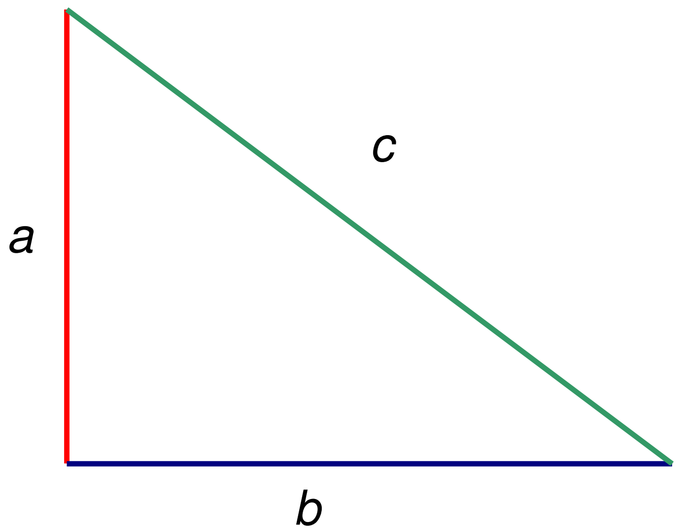
2) kwadratami (i tu pojawiły się poważne kłopoty)

Jak narysować koło? A jak kwadrat?

https://pt.wikipedia.org/wiki/Grande_Arquiteto_do_Universo

Pitagoras: odkrycie bardzo proste

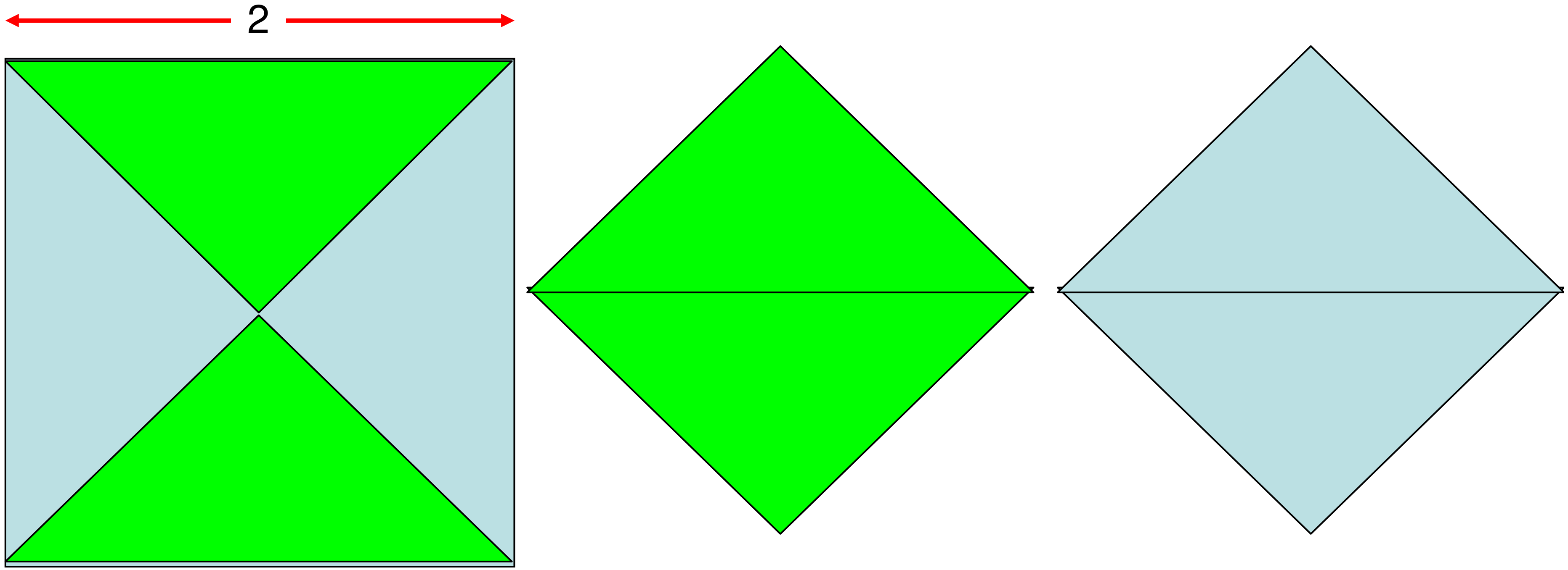
- 9 + 16 = 25
- 3x3 + 4x4 = 5x5



$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Pitagoras: wstrząsające odkrycie

- Nie wszystkie liczby dadzą się zapisać jak (egipskie) ułamki



$P = 2 \times 2 = 4$

$P_1 = 2 = ? \times ?$

Liczba „niewymierna”

- Jest tylko jedna liczba, która pomnożona przez siebie daje 2
- Nazwiemy ją „pierwiastek” $\sqrt{2}$
- $P_1 = 2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
- Niestety, nie daje się przedstawić

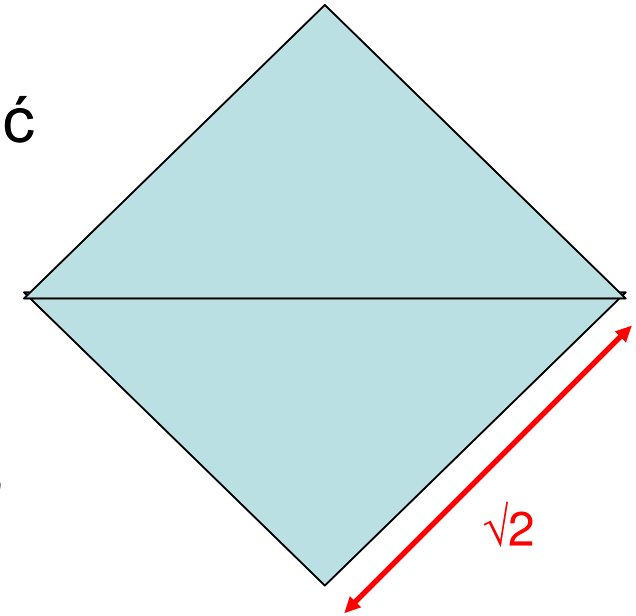
jako ułamek

$\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$

$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488\ldots$

Dlatego nazywamy ją *niewymierną*

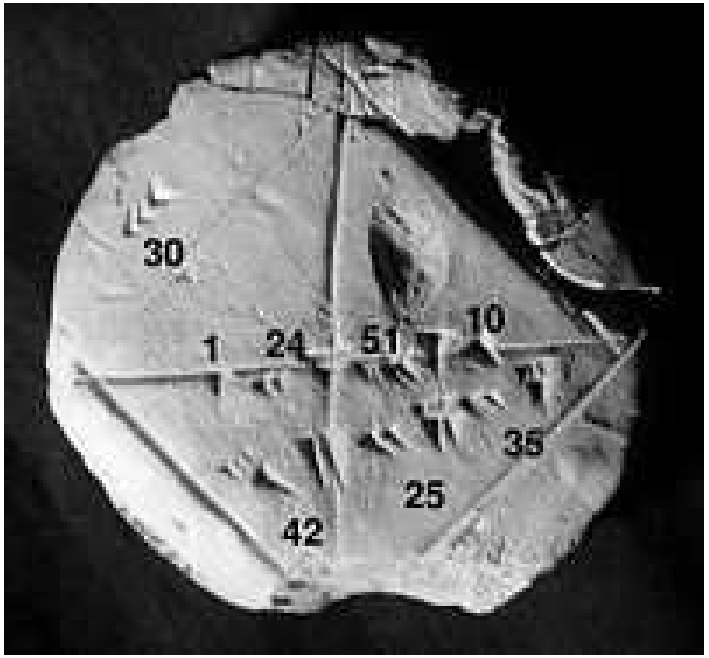
(„nie-racjonalną”, po angielsku)

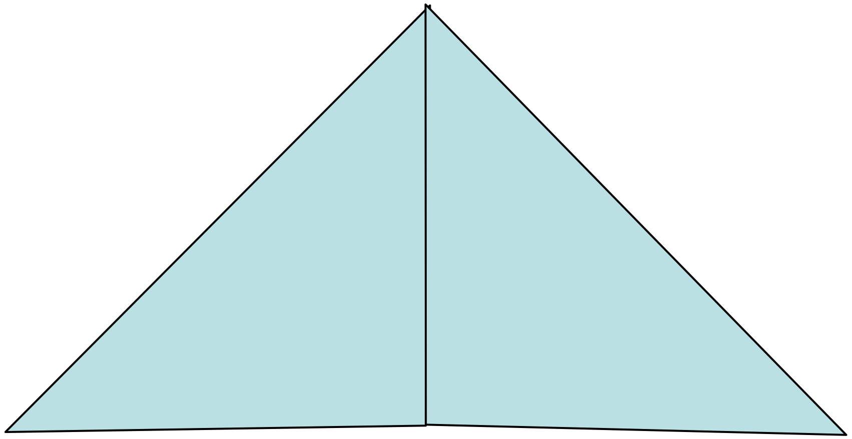


https://en.wikipedia.org/wiki/Square_root_of_2#Computation_algorithms

Ale to też już znali Babilończycy…

- $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 30547/21600 \approx 1{,}41421(296)$





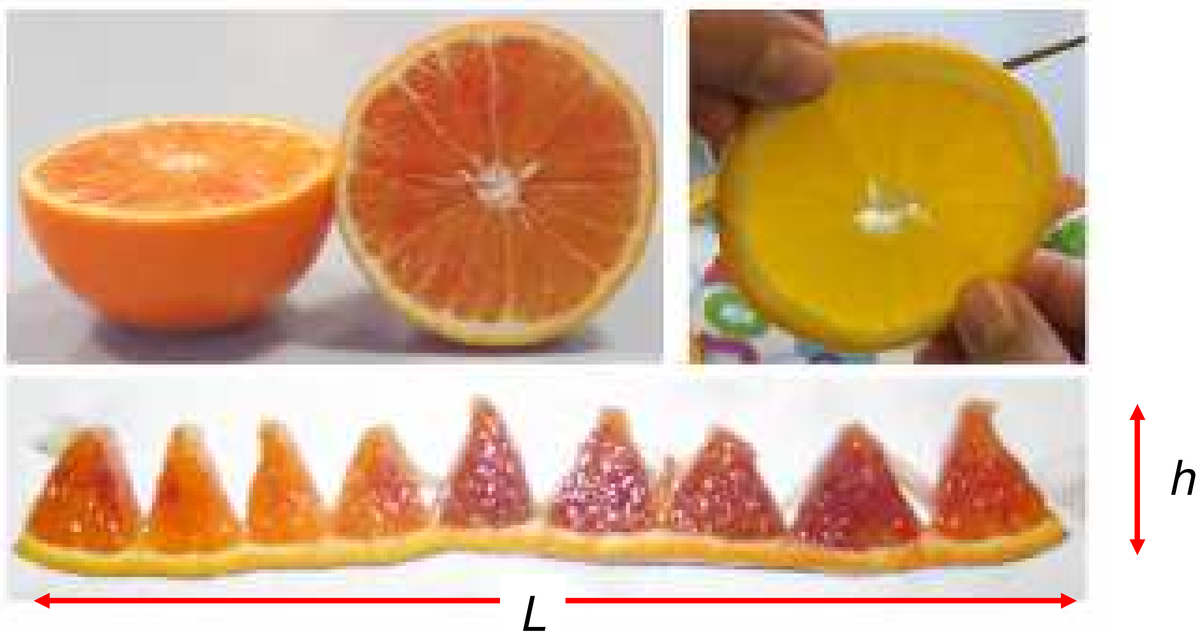
- Dziś znamy $\sqrt{2}$ z dokładością do tryliona cyfr…

Babylonian clay tablet YBC 7289 with annotations. Besides showing the square root of 2 in sexagesimal (1 24 51 10), the tablet also gives an example where one side of the square is 30 and the diagonal then is 42 25 35. The sexagesimal digit 30 can also stand for 0 30 = 1/2, in which case 0 42 25 35 is approximately 0.7071065

https://en.wikipedia.org/wiki/Square_root_of_2#Computation_algorithms.

Ile kawałków ma pomarańcza?

Laura Trivellato, Trento: https://edulab.unitn.it/dicomat/geometria-ss-i-g/cerchio/larea-del-cerchio/



Pole trójkąta potrafimy policzyć: $P = ½\ L\ h$

Czyli: długość skórki (okręgu) x promień / 2

Ile wynosi obwód koła? Musimy to zmierzyć!

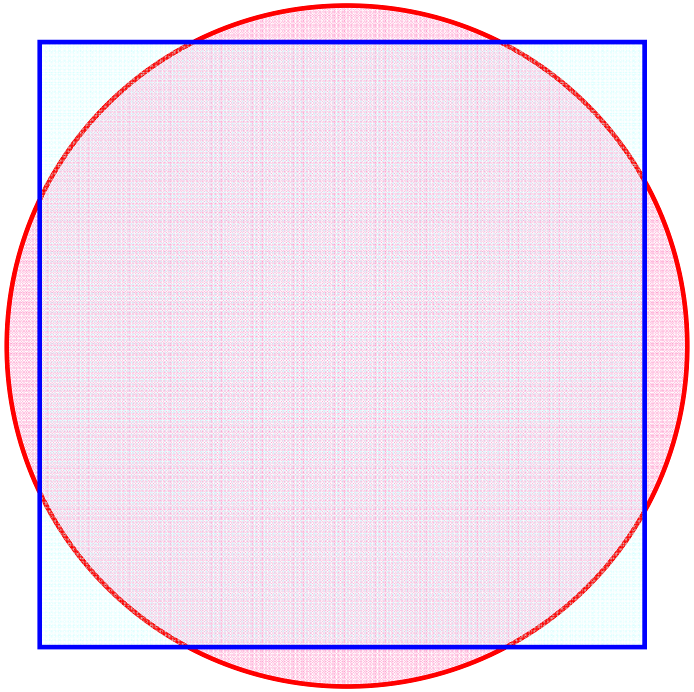
Stosunek obwodu koła (=peryferii) do średnicy nazwiemy π

Czyli: stosunek obwodu do średnicy jest dla każdego koła taki sam.

Ale ile on wynosi?

Możemy więc, zrobić z koła kwadrat – ale jak?

Pisarz Ahmes (papirus Rind):
„Odejmij 1/9 od średnicy,
i na tym co zostanie,
zbuduj kwadrat”

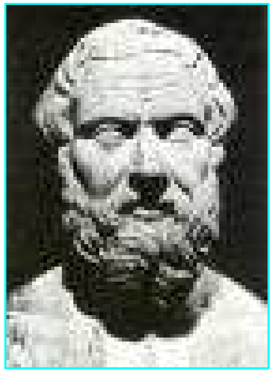


$$\pi = 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3{,}16049...$$

Błąd < 1%

Alessandra Del Piccolo
Istituto BERTI, Torino

Piramida Cheopsa (1500 p.n.e)



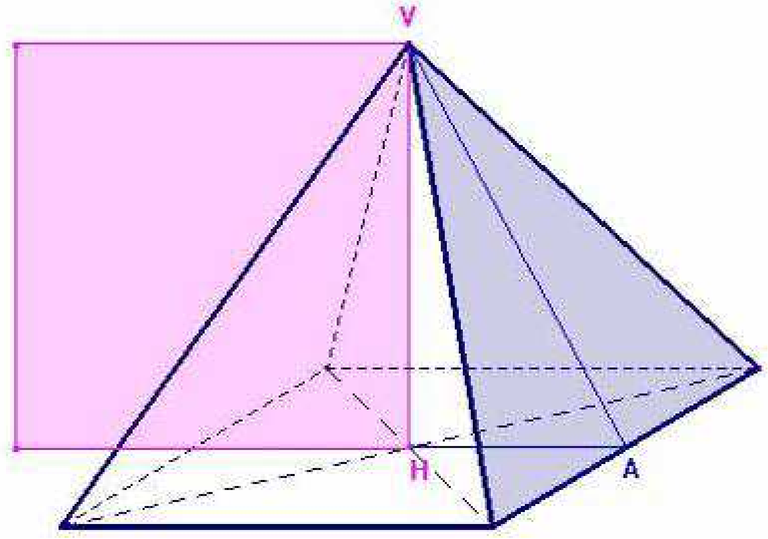
Herodot zapisał, że Wielka Piramida w Gizie została zbudowana w sposób następujący:

Powierzchnia ścian bocznych jest równa kwadratowi o boku równym wysokości piramidy

Alessandra Del Piccolo
Istituto BERTI, Torino

l'area di ogni faccia laterale è pari a quella
del quadrato costruito sull'altezza.

siano: $VH = h$;
$AH = l/2$;
$AV = a$.



$$\begin{cases} \dfrac{l}{2} \cdot a = h^2 \\ h^2 + \dfrac{l^2}{4} = a^2 \end{cases}$$

<u>Obwód postawy</u>
wysokość

$$\frac{\text{perimetro di base}}{\text{altezza}} = \frac{4l}{h} = 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}} \cong \pi.$$

Do liczby $(1+\sqrt{5})/2$ jeszcze wrócimy….

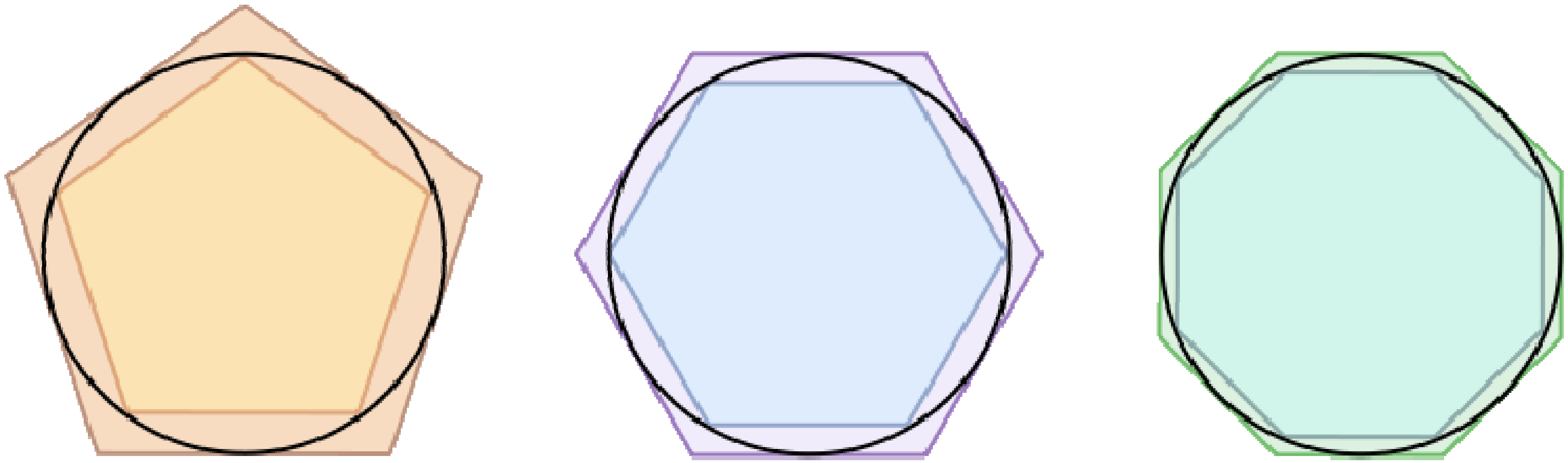
Alessandra Del Piccolo
Istituto BERTI, Torino

Archimedes (287-212 a.C.) Syrakuza

TRANSIRE SUUM PECTUS MUNDOQUE POTIRI.
Przekroczyć własnego ducha i ogarnąć świat
Davide Mauro - Opera propria
https://it.wikipedia.org/wiki/Archimede

The photos of the Fields Medal (this is the one Grigori Perelman did not accept) were made by Stefan Zachow (ZIB)

Archimedes

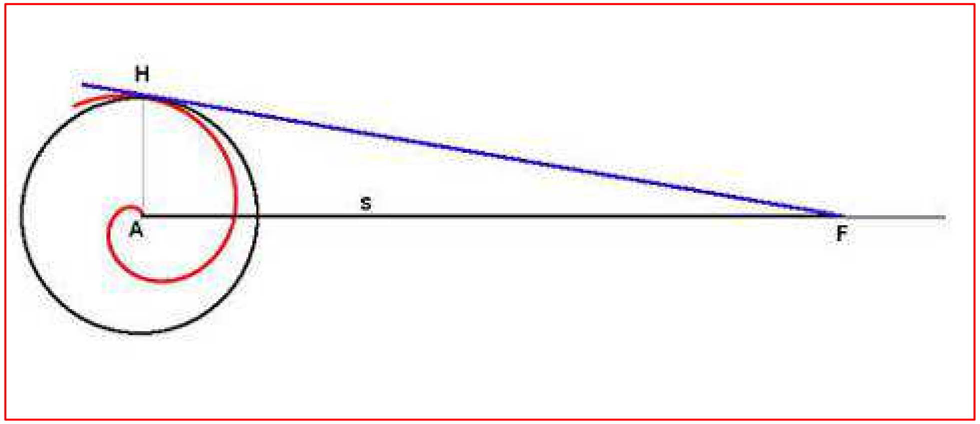


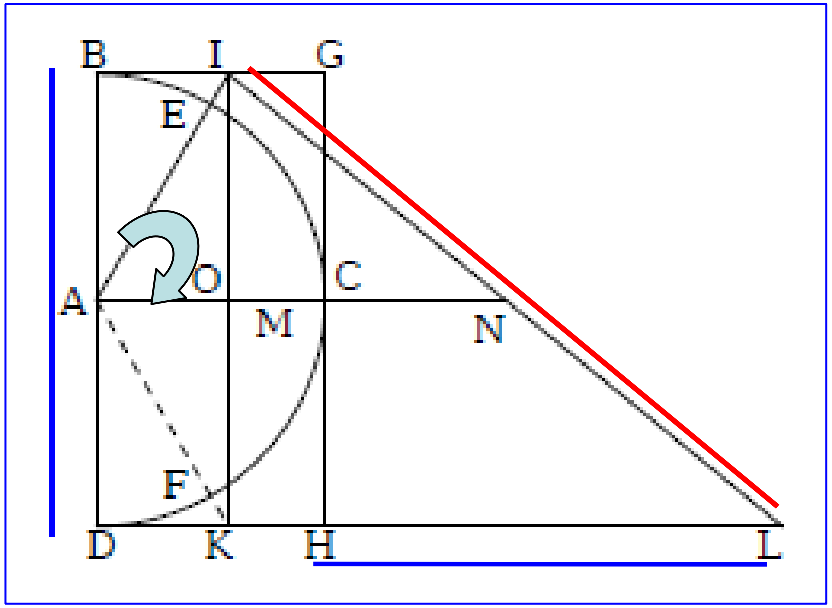
$$3 + {}^{10}/_{71} < \pi < 3 + {}^{10}/_{70}$$

$$3{,}14085 < \pi < 3{,}14286$$

Dokładność (średniej = 3,1419) **: 0,008%**

Rozwinięcie okręgu (Archimedes, Kochański 1685)





$r(\theta) = a + b\theta$

FH – styczna do spirali: długość okręgu = AF

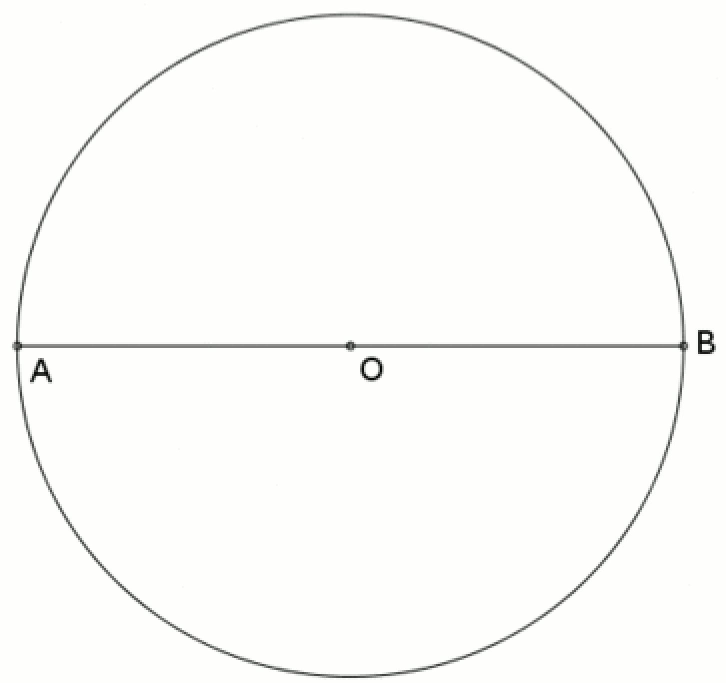
https://it.wikipedia.org/wiki/Spirale_archimedea

Kochański: $$|IL| = \frac{1}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}} = 3.1415333\ldots,$$

$$\frac{96}{32} + \frac{4}{32} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{32} + \frac{1}{32\cdot 32} = \frac{3217}{1024} = 3.1416015625$$

Srinivasa Ramanujan (1914)

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:01-Squaring_the_circle-Ramanujan-1914.gif



$\pi = \sqrt[4]{9^2 + 19^2/22} \approx 3{,}1415926525826\ldots$

Błąd: 0,0000000010071

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{k!^4 (396^{4k})}.$$

Sposoby na obliczenie liczby *pi*

- $\pi = 4 – 4/3 + 4/5 – 4/7 + 4/9 – 4/11 + 4/13 - \ldots$
- $\pi = 3 + 4/(2·3·4) – 4/(4·5·6) + 4/(6·7·8) – 4/(8·9·10) + \ldots$
- $\pi^2/6 = 1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \ldots$
- $\pi/2 = 2/1 · 2/3 · 4/3 · 4/5 · 6/5 · 6/7 · 8/7 · 8/9 · \ldots$
- $\pi = 2 · 2/\sqrt{2} · 2/ \sqrt{(2+\sqrt{2})} · 2/ \sqrt{[2+\sqrt{(2+\sqrt{2})}]} · \ldots$ (Viète)
- …
- **3,14**159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 7067

https://www.focus.it/scienza/scienze/ecco-perche-non-possiamo-fare-a-meno-del-pi-greco

Wyścig trwa

- 31 grudnia 2009 r. Fabrice Bellard ogłosił, że udało mu się obliczyć π z dokładnością do 2 700 miliardów cyfr. Obliczenia ze sprawdzeniem zajęły 131 dni, do obliczeń użyto komputera z procesorem Intel Core i7 (2,93 GHz) i 6 GB RAM. Sam zapis binarny liczby zajmuje około 1,12 TB[3].
- W roku 2010 obliczono cyfrę będącą na 2 000 000 000 000 000 miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby pi i wynosi ona zero. Obliczenia trwały 23 dni na 1000 maszynach[4].
- W październiku 2011 Alexander J. Yee i Shigeru Kondo uzyskali dokładność ok. 10 bilionów (1013) miejsc po przecinku[5]. Obliczenia zajęły 371 dni.
- W październiku 2014 anonimowa osoba o nicku *houkouonchi* uzyskała dokładność ok. 13,3 bilionów miejsc po przecinku. Obliczenia zajęły 208 dni, a sprawdzanie 182 godziny[6].
- W listopadzie 2016 Peter Trueb uzyskał dokładność ok. 22,5 bilionów miejsc po przecinku przy pomocy programu y-cruncher [1]. Obliczenia zajęły 105 dni, a sama liczba zajęła ok. 120 TB miejsca. [6]

Wikipedia.pl

Archimedes: objętość kuli

Walec o wysokości *h* i o podstawie o promieniu *R*

$$V = \pi R^2 h$$

Stożek o wysokości *h* i o podstawie o promieniu *R*

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

G. Karwasz, M. Sadowska, K. Rochowicz, *Toruński poręcznik do fizyki*, UMK 2009

Archimedes: objętość kuli

Stożek o wysokości *h* i o podstawie o promieniu *R*

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Kula o promieniu *R*

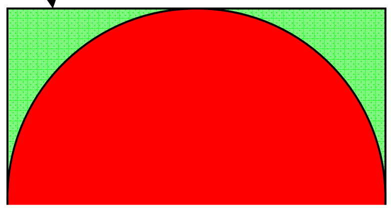
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Kula o promieniu *R*

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

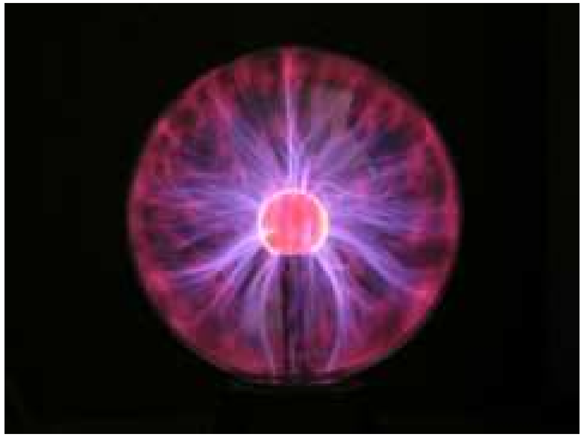
1/3 objętości walca

$V_{\text{półkuli}} = 2/3\ \pi\ R^3$



$$\boxed{V_{\text{kuli}} = 4/3\ \pi R^3}$$

Najważniejszy wzór geometrii (3D)

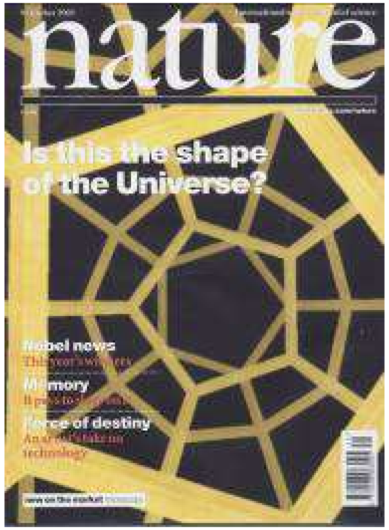


Pole powierzchni kuli $P = 4\pi R^2$

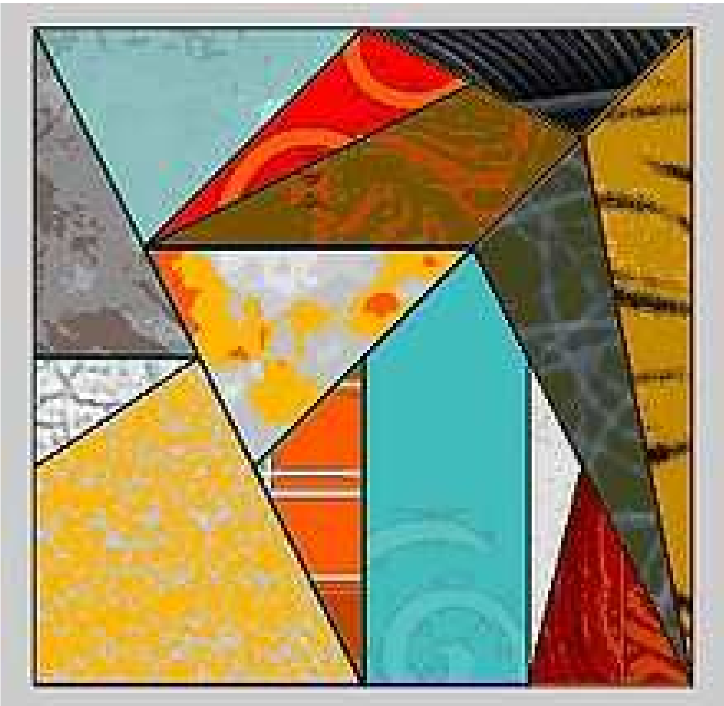
Z tego powodu siły elektryczne $F = Qq/(\varepsilon_0 4\pi R^2)$

Siła grawitacji (Newtona) $F=GMm/R^2$

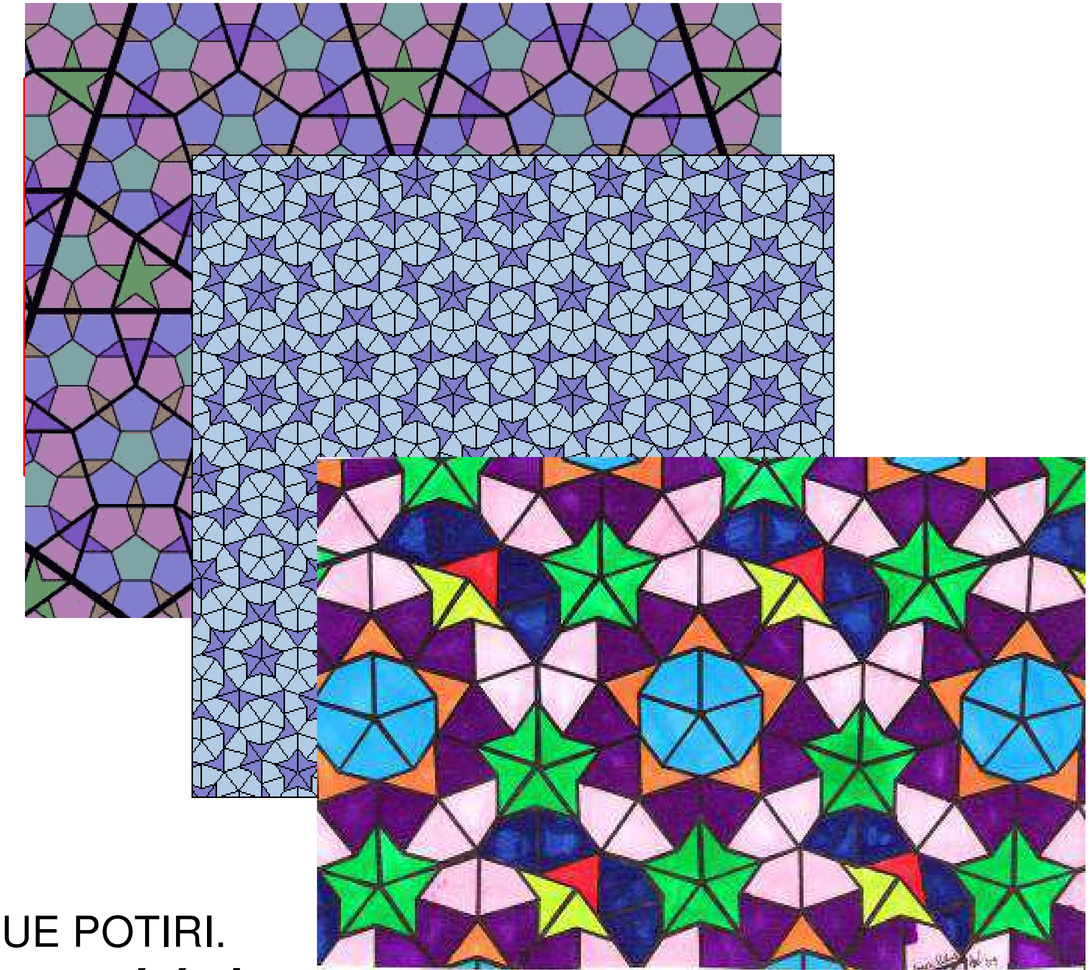
I gdyby tak nie było, świat nie byłby trójwymiarowy



Archimedes vs. Penrose



„Tangram”



TRANSIRE SUUM PECTUS MUNDOQUE POTIRI.

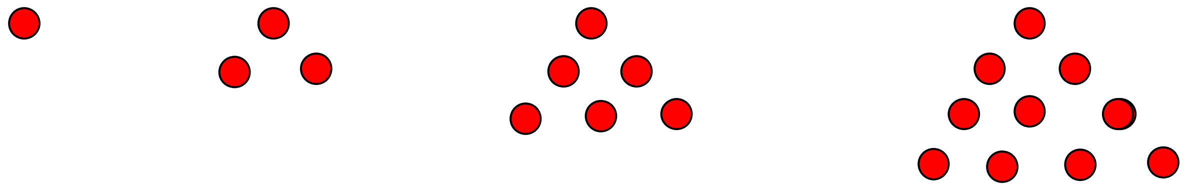
Przekroczyć własnego ducha i ogarnąć świat

Davide Mauro - Opera propria
https://it.wikipedia.org/wiki/Archimede

The photos of the Fields Medal (this is the one Grigori Perelman did not accept) were made by Stefan Zachow (ZIB)

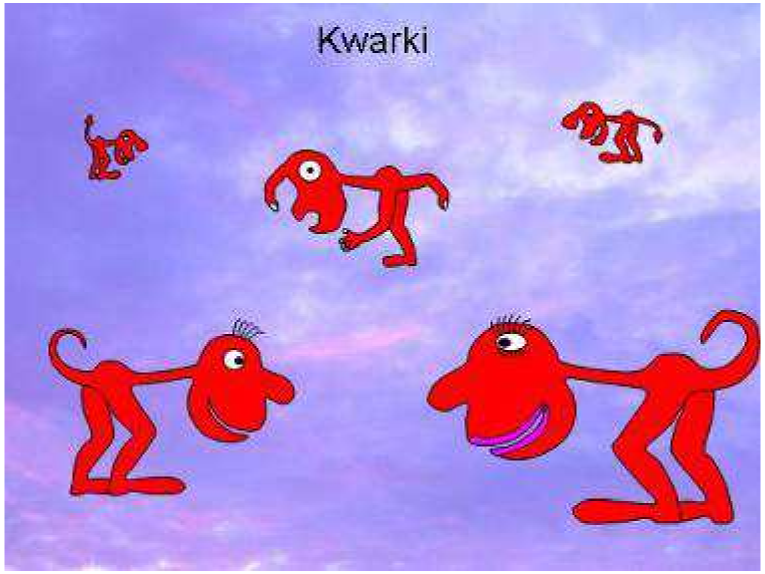
J. Barrow: „Numerologia”

Pitagoras: liczby „trójkątne”



1 3 6 10

Tutaj spoczywa Jan Gula
Karabinowa dosięgła go kula.
Naprawdę nazywał się Orzeł,
Lecz Orzeł nie rymuje się z kula,
A z Gula rymować się może.

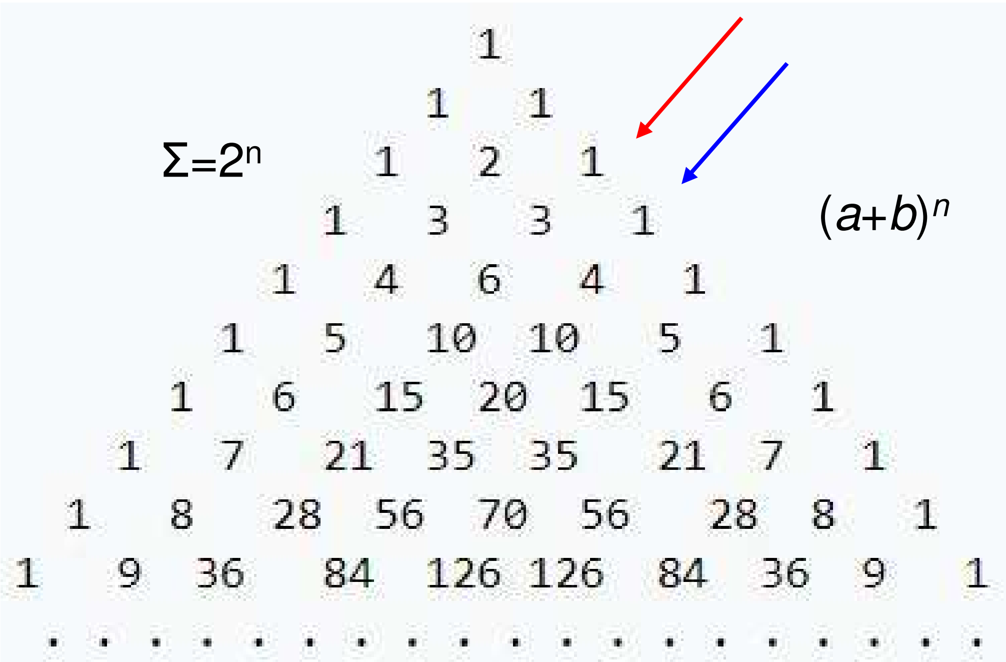


Nie wiemy, dlaczego masy kwarków sa takie, a nie inne

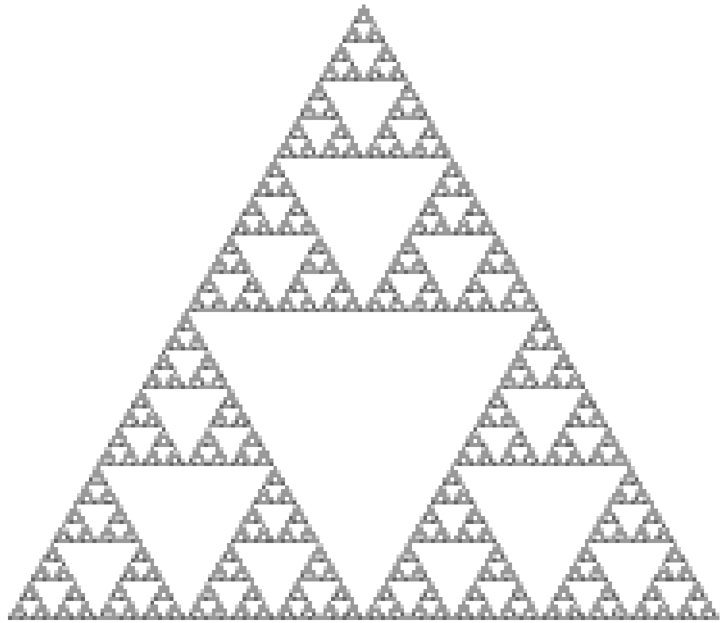
Trójkąt Pascala (Tartagli)

$\Sigma=2^n$

$(a+b)^n$



Liczby trójkątne, piramidalne, etc.

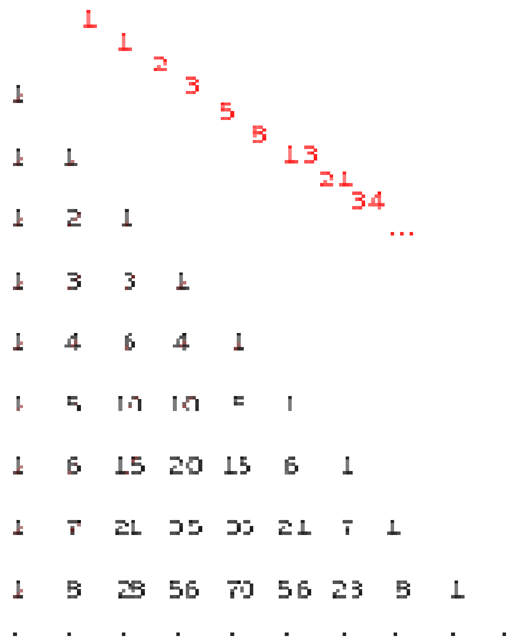


Trójkąt Sierpińskiego (fraktal)

https://it.wikipedia.org/wiki/Successione_di_Fibonacci
By self Georg-Johann Lay - self made using home brew software and convert, Domena publiczna, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3726809

Ciąg Fibonacciego (1170-1250)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

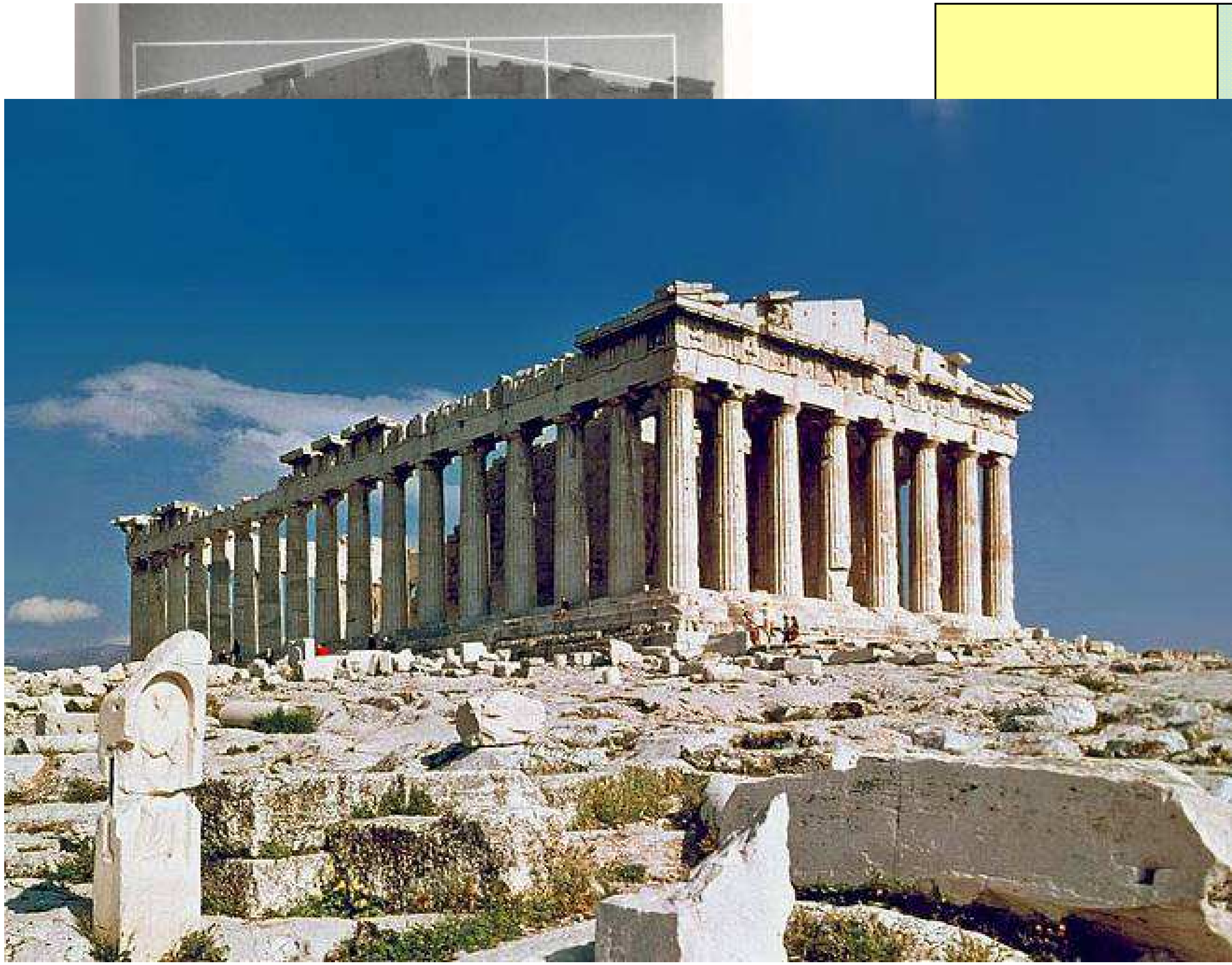


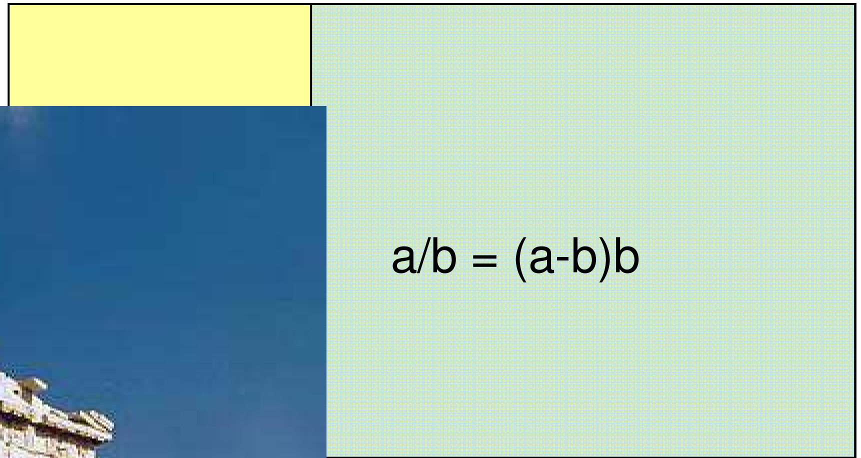
Ilość par królików w *n*-tym pokolenu

$\Phi=(1+\sqrt{5})/2$

Złota proporcja

Złota proporcja

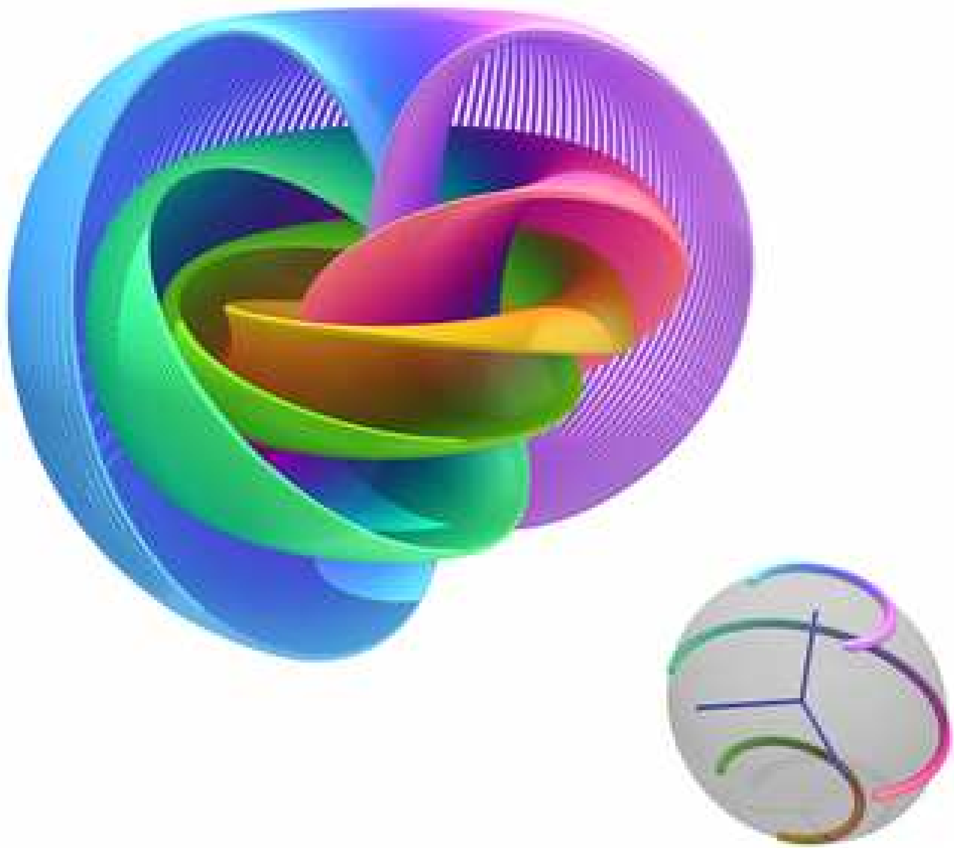




$$a/b=\Phi=(1+\sqrt{5})/2$$

By Steve Swayne - File:O Partenon de Atenas.jpg, originally posted to Flickr as The Parthenon Athens, CC BY 2.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17065839

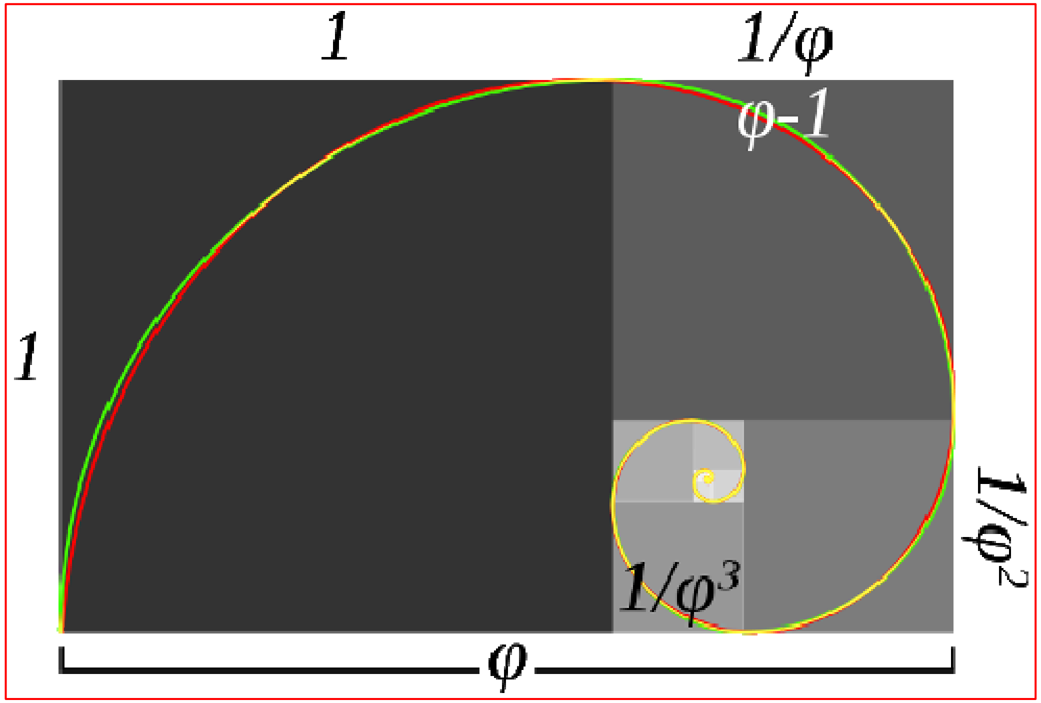
Matematyka piękna



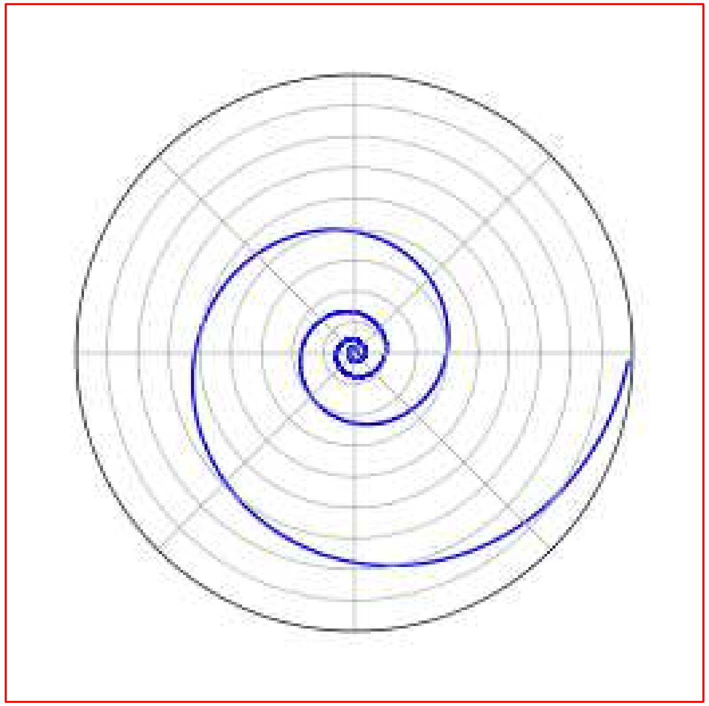
The Hopf fibration of the 3-sphere, by Villarceau circles, over the complex projective line with its Fubini–Study metric (three parallels are shown). The identity $S3(1)/S2(1) = \pi/2$ is a consequence.

http://www.hotel-r.net/im/hotel/de/rosa-6.gif

Złota spirala



„Złota” spirala i spirala logarytmiczna



$r = a\, e^{b\theta}$

Promień rośnie „ileś” razy z każdym obrotem

Spirala „logarytmiczna”

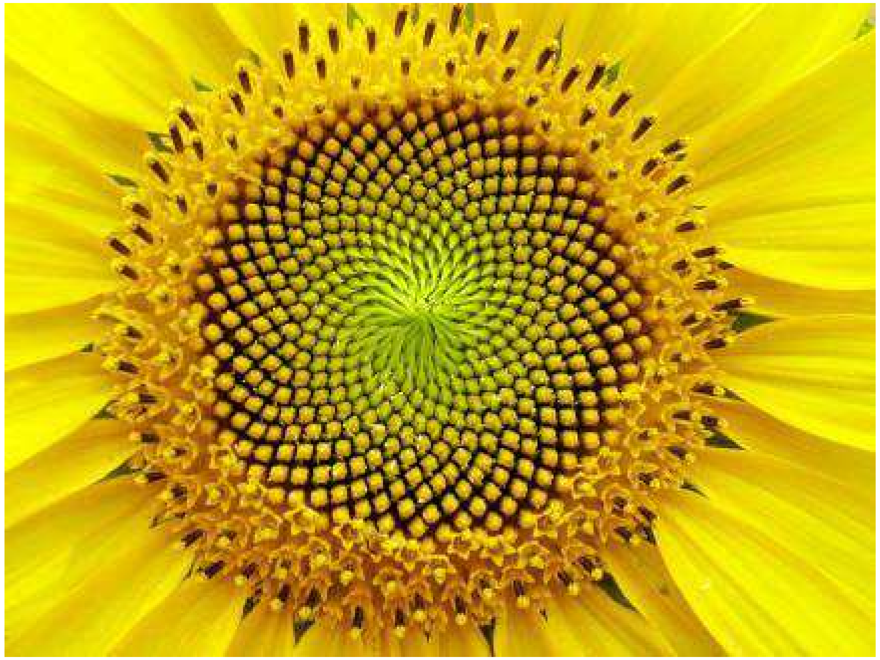
Muszla nautilusa

Niż nad Islandią

e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995

Spirala „logarytmiczna": liczba *e*

Galaktyka „Whirpool" M51



Słonecznik

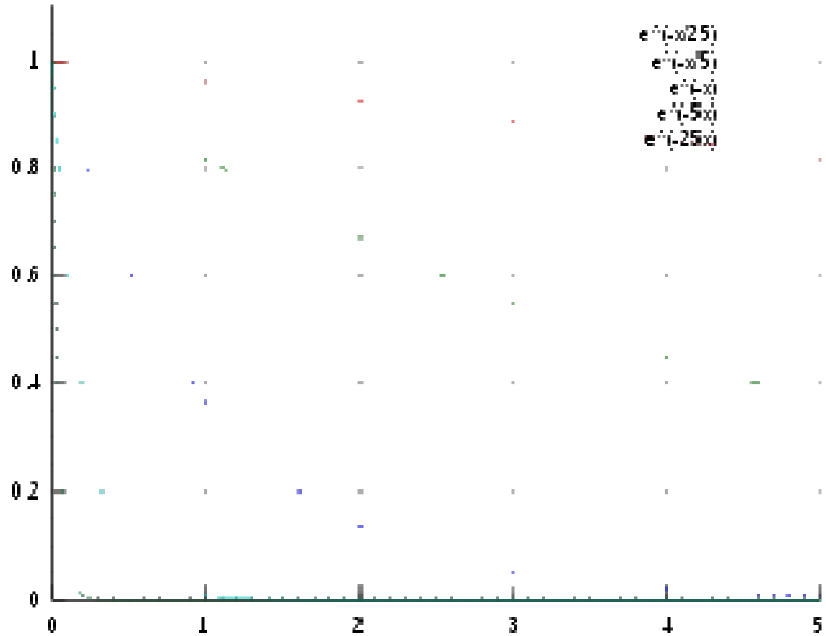
$$e = \Sigma_{n=0} (1/n!) = 1/1 + 1/1 + 1/(1 \cdot 2) + 1/(1 \cdot 2 \cdot 3) + \ldots$$

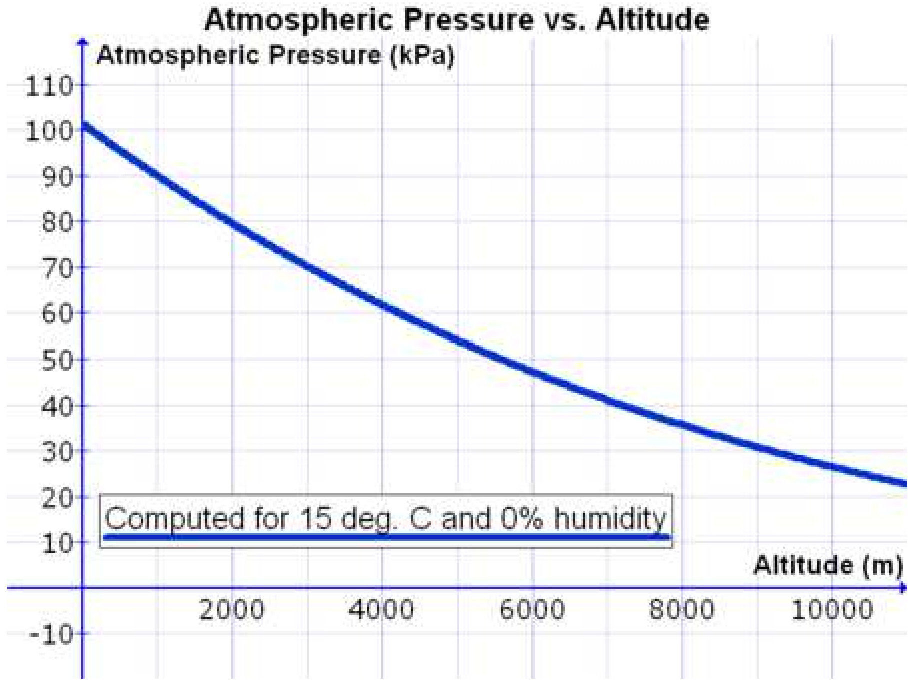
$$e = \lim_{n \to \infty} (1+1/n)^n$$

http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap050428.html
https://www.daringgourmet.com/wp-content/uploads/2013/06/Sunflower-public-domain-4-sm.jpg

Wzrost/ spadek eksponencjalny

$$\boxed{N = N_0 e^{-t/\tau}}$$



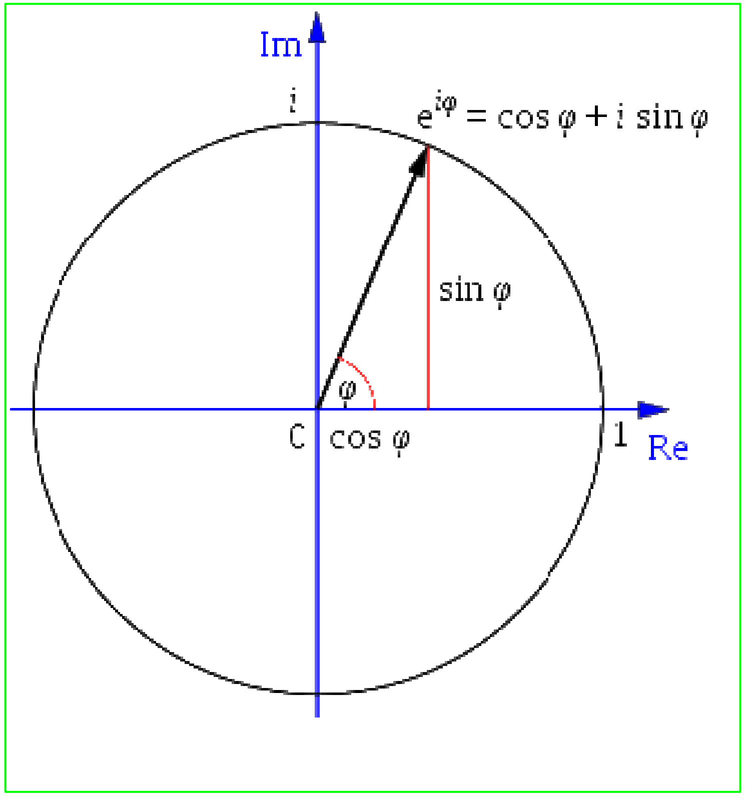


Geek.not.nerd

https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_decay
https://en.wikipedia.org/wiki/RC_circuit
https://en.wikipedia.org/wiki/Atmospheric_pressure

Najpiękniejszy wzór matematyki

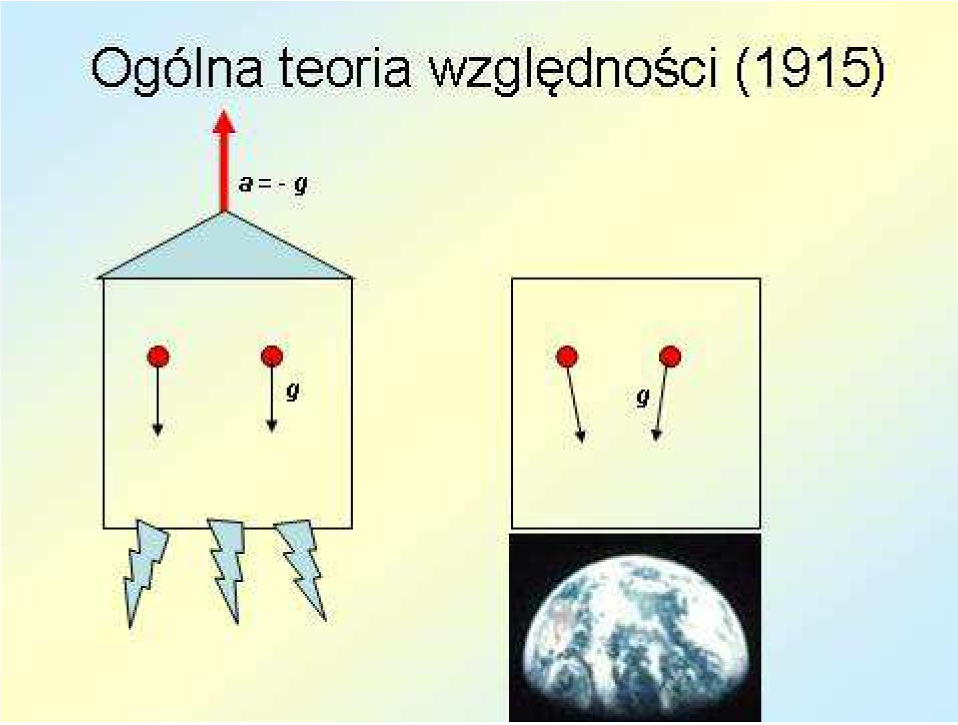
- Jeszcze jedna dziwna liczba $i = \sqrt{-1}$



https://en.wikipedia.org/wiki/Pi

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Najpiękniejszy wzór fizyki



$$\mathbf{G} = \frac{8\pi G}{c^4}\mathbf{E}$$

Geometria czasoprzestrzeni zależy od materii (masy i energii)

Dante Aligheri

- Paradiso, XXXIII, 133-135

„Qual è ‘l geomètra che tutto s’affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond’elli indige,”

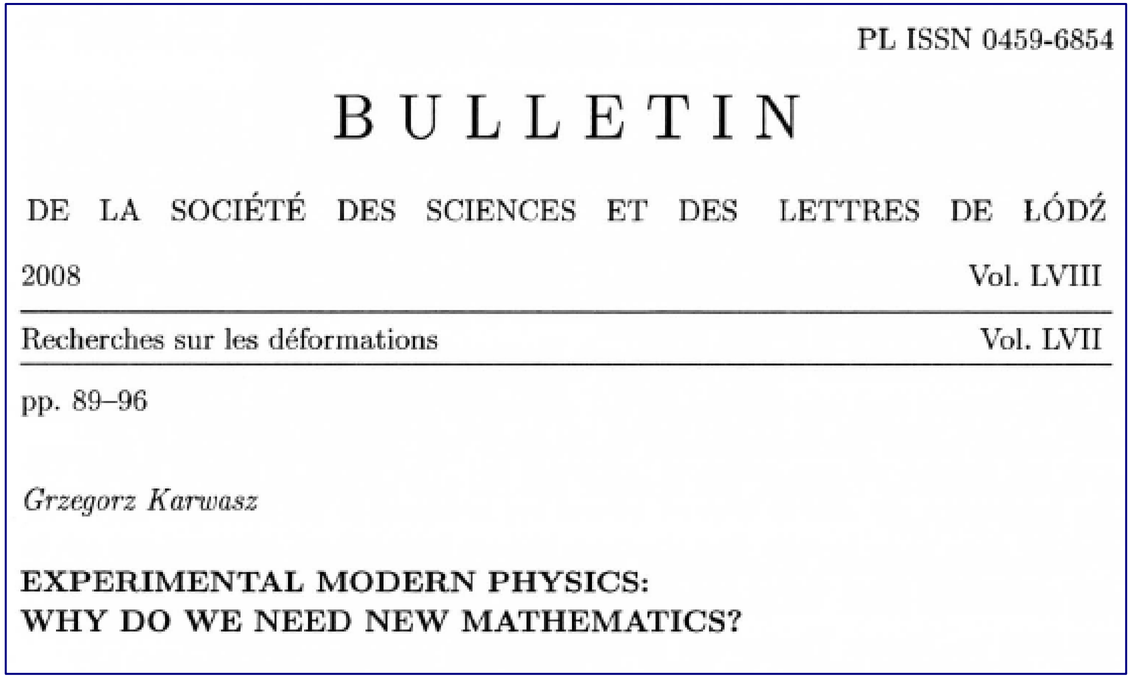
„jak geometra, który wciąż się trudzi,

by zmierzyć koło, a nic znajduje,

myśląc, o prawie, którego nie widzi

Co dalej z matematyką?

To co zawsze: pozostają królową nauk



PL ISSN 0459-6854

BULLETIN

DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES ET DES LETTRES DE ŁÓDŹ

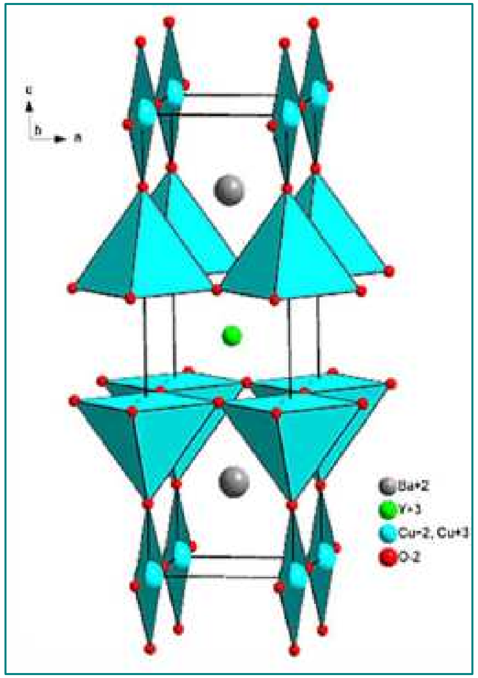
2008 Vol. LVIII

Recherches sur les déformations Vol. LVII

pp. 89–96

Grzegorz Karwasz

EXPERIMENTAL MODERN PHYSICS:
WHY DO WE NEED NEW MATHEMATICS?



Nadprzewodniki wysokotemperaturowe: przestrzeń fraktalna?
Ciemna energia: nowe geometrie, nie tylko nie euklidesowe ale i nieprzemienne ?
Strzałka czasu: chiralność przestrzeni?

Literatura

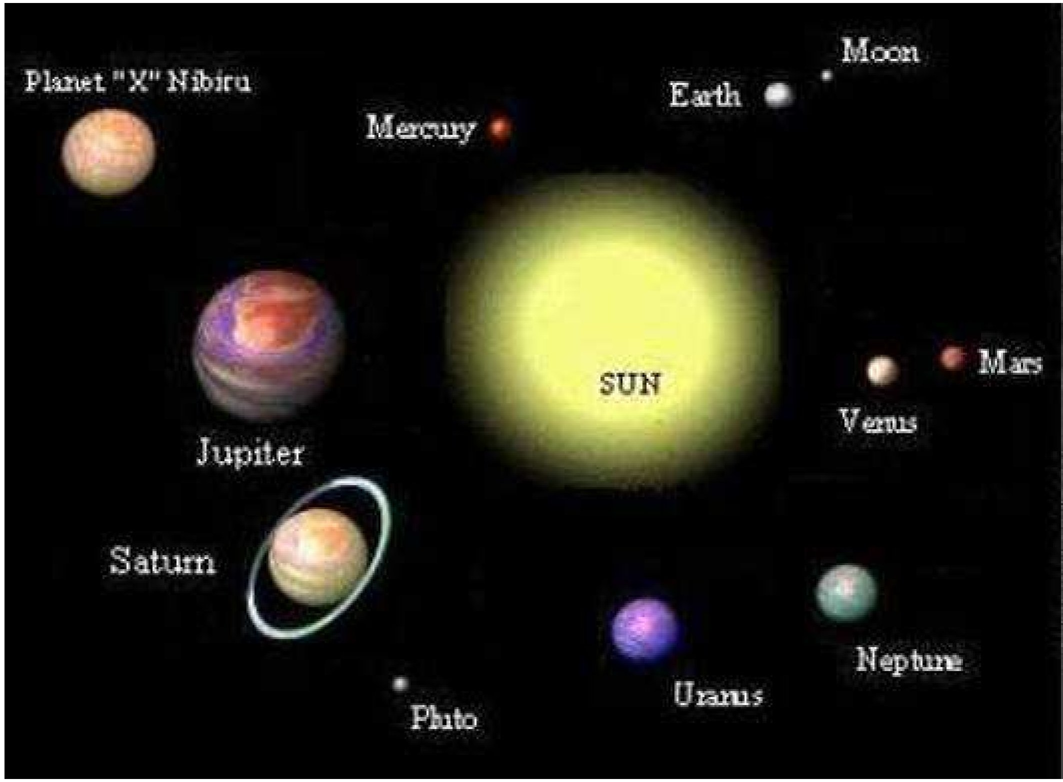
Joaquín Navarro, *Tajemnice liczby π. Dlaczego niemożliwa jest kwadratura koła?* Świat jest matematyczny, RBA, Barcelona, 2010

Fernando Corbalán. *Złota proporcja. Matematyczny język piękna*. RBA, 2010

John D. Barrow, *Stałe natury. O liczbach skrywających najgłębsze tajemnice wszechświata.* Copernicus Center, Kraków, 2017

- https://pl.wikipedia.org/wiki/Pi
- https://en.wikipedia.org/wiki/Pi
- https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/ICT/Htmls/Interventi/Articoli/Italia/PiCorgnier/PiCorgnier.html
- http://www.angio.net/pi/piquery.html

PS. Czy Sumerowie znali 9 planet?



https://www.sitchinstudies.com/the-sumerian-solar-system.html