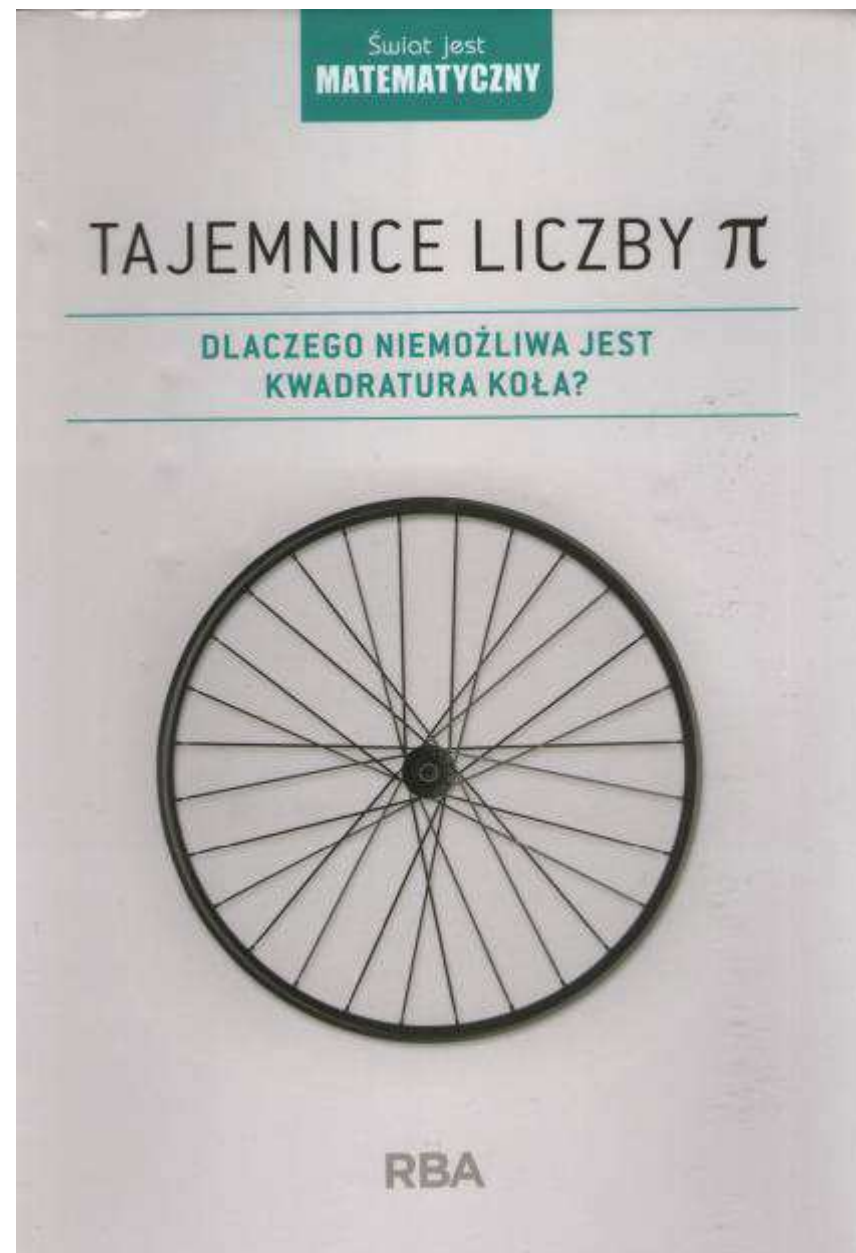


# Kwadratura koła

Grzegorz Karwasz

Toruń, 2018. 3.14 15:92:65



# Komentarz dydaktyczny

- Wykład, wygłoszony 14 marca dla grupy ok. 100 uczniów ze szkół toruńskich (6-7-8<sup>o</sup>klasa szkoły podstawowej) pokazuje, że matematyka nie jest jedynie nauką abstrakcyjną, opartą o zestaw aksjomatów.
- (Zresztą w takiej aksjomatycznej postaci, jak to pokazał Gödel, musi być albo niekompletna, albo wewnętrznie sprzeczna).
- Matematyka rozwinęła się bardzo, bardzo dawno temu (pierwszy zapis liczenia po 28 dni pochodzi sprzed 40 tys. lat) jako nauka służąca celom praktycznym – wymierzania poletek wokół Nilu i budowania zigurratów w Mezopotamii.
- Umiejętności matematyczne kilka tysięcy lat temu były znaczne – dodawania ułamków (zapewne jako wycinki kół rysowanych patykiem na piasku), obliczania objętości piramid, przeliczania receptur produkcji piwa itd.

# Komentarz dydaktyczny

- Wykład jest trudny, jako że nie ogranicza się do typowych przy tych okazjach dywagacjach na temat „magicznych” własności liczby  $\pi$ , ale prowadzi do argumentów bardzo trudnych, jak związek Eulera.
- Wykład był ilustrowany różnymi aktywnościami interaktywnymi, z udziałem uczniów. Niektóre z nich wzorowane są na opracowaniach kolegów dydaktyków matematyki (np. z Uniwersytetu w Trento), inne zostały przygotowane oryginalnie dla tego wykład
- Potrzebne rekwizyty to np. pomarańcza, sznurek, owalny talerz, pokrywka do smażenia jajek w kuchence mikrofalowej, stożkowe kieliszki, a w końcu też imadło i ciężki młotek.
- W takim ujęciu, matematyka wraca jako nauka doświadczalna, indukcyjna, interaktywna, i prosta.
- Reportaż z wykładu jest zawarty w oddzielnym materiale internetowym.

# Einstein: „Dobry Pan Bóg...”

- Dobry Pan Bóg wymyślił liczby naturalne: 1,2,3, dziesięć, sto, tysiąc i jeszcze większe, np.:
- „do kroćset kroci tysięcy fur beczek furgonów, milionów (diabłów!, bo jakem Maciej)”
- Jabłka, kamienie, atomy, liczy się w liczbach naturalnych.
- W matematyce rzymskiej nie było zera (bo jak czegoś nie ma , to nie ma).
- I wszystko szło dobrze, do czasów niejakiego Pitagorasa (VI wiek przed n.e.)
- Ale zacznijmy od początku...

# Już 4 tysiące lat temu...

- W starożytnym Egipcie (i na pewno też w Mezopotamii) ludzie wymyślili matematykę: trzeba było sprawiedliwie dzielić poletka wzdłuż Nilu (i obliczać podatki)

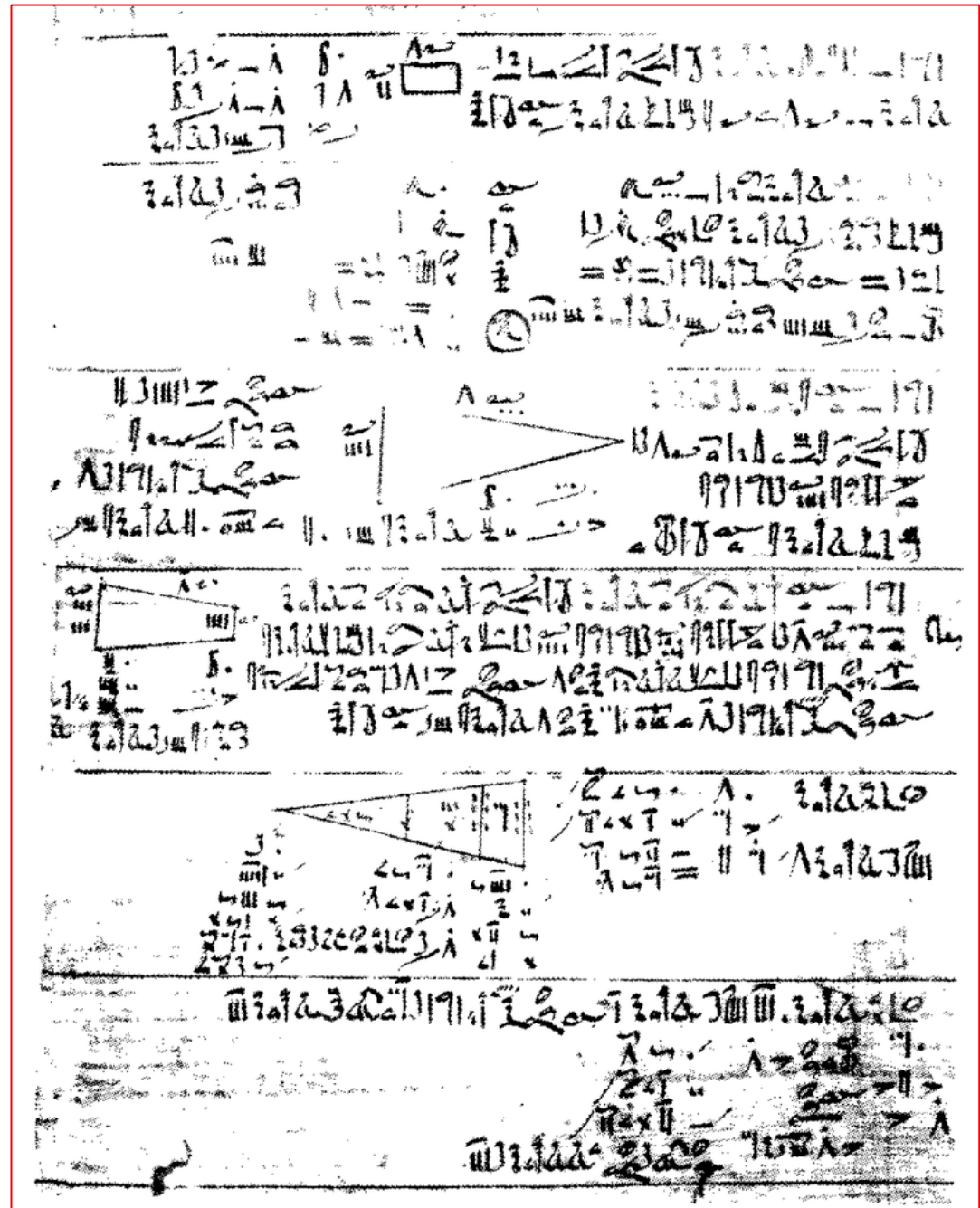
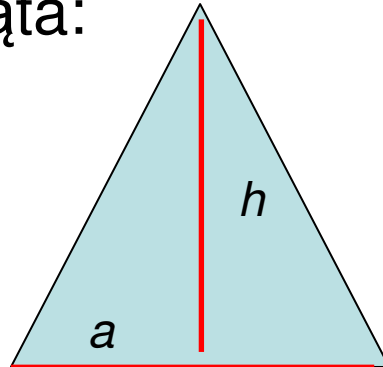


[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/62/Ziggarut\\_of\\_Ur\\_-\\_M.Lubinski.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/62/Ziggarut_of_Ur_-_M.Lubinski.jpg)

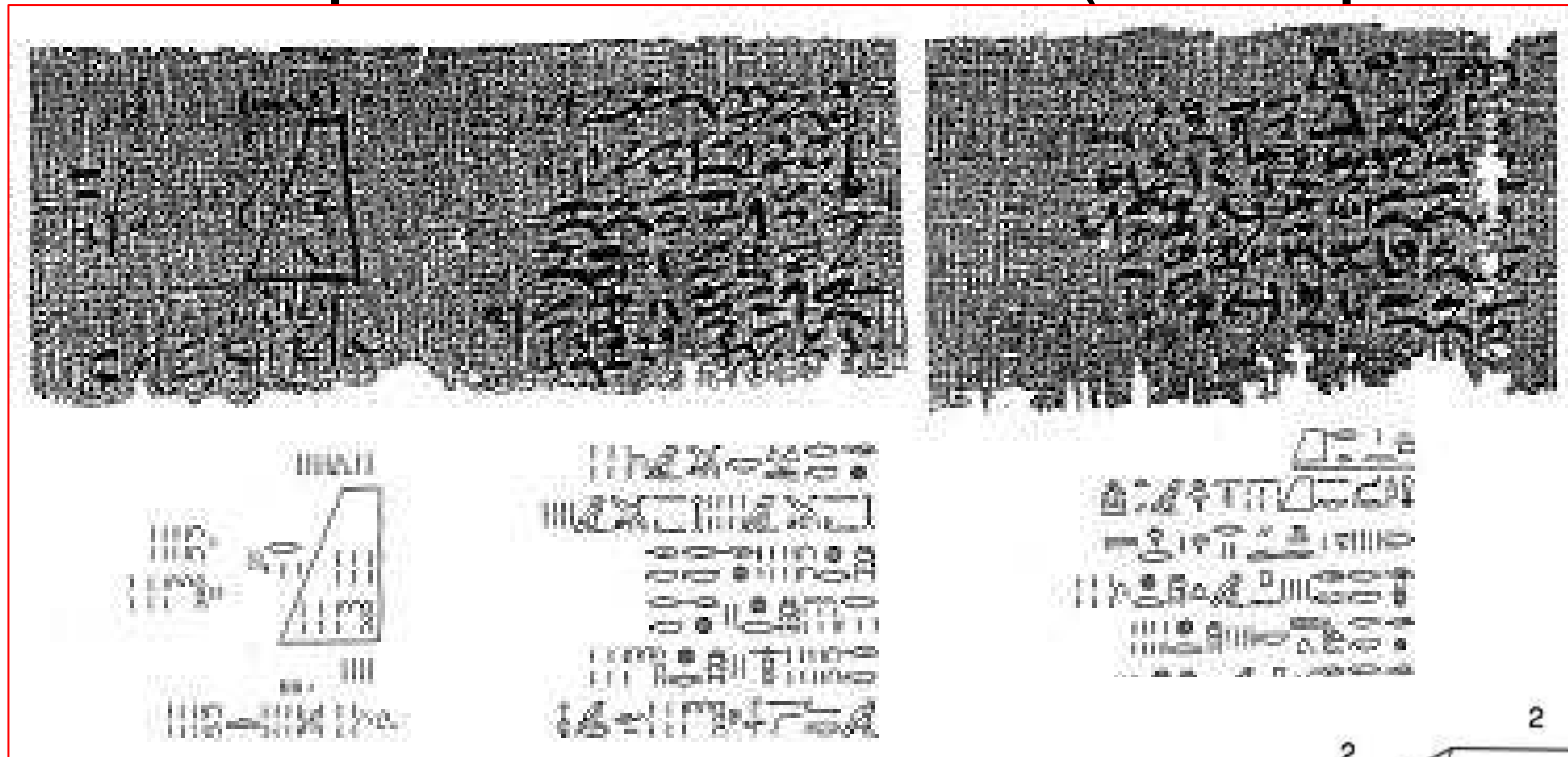
# Papiirus Rhind (~1550 p.n.e)

Dodawanie ułamków:  
 $2/15 = 1/10 + 1/30$

Pole trójkąta:  
 $P = 1/2 a \cdot h$

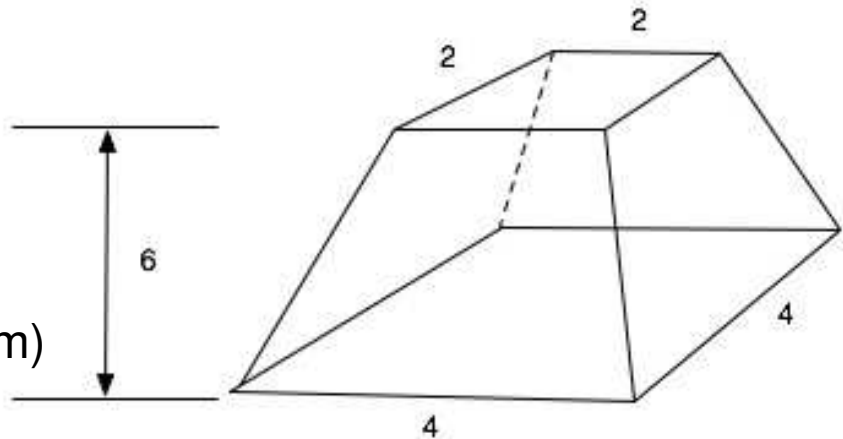


# Papirus moskiewski (1850 p.n.e.)



$$V = \frac{1}{3} h (a^2 + ab + b^2)$$

Jak uwarzyć dobre piwo? (Pefsu problem)



By Unknown - Struve, Vasilij Vasil'evič, and Boris Turaev. 1930. Mathematischer Papyrus Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik; Abteilung A: Quellen 1. Berlin: J. Springer, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6309027>

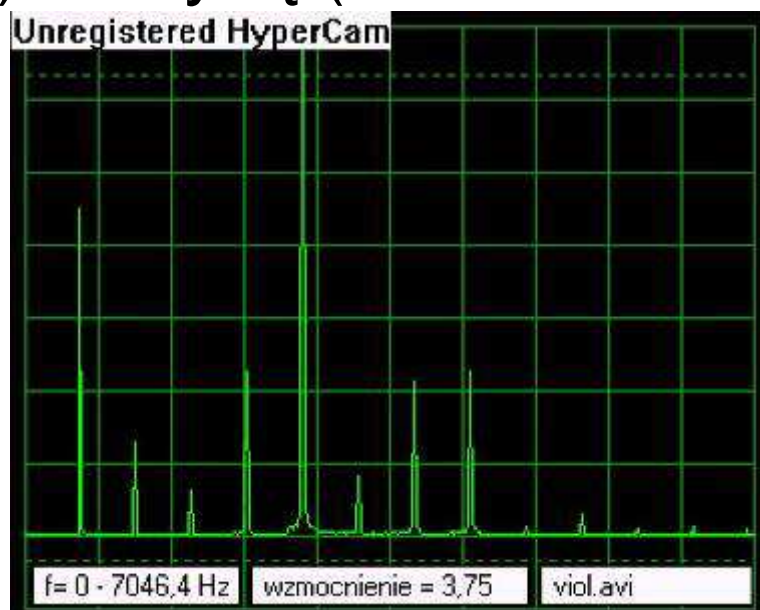
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4997129>

# Pitagoras z Samos

„Liczba jest istotą wszystkich rzeczy” [wiki.pl]



- Pitagoras zajmował się dwoma zagadnieniami:  
1) muzyką (i tu szło dobrze)



- 2) kwadratami (i tu pojawiły się poważne kłopoty)

# Jak narysować koło? A jak kwadrat?



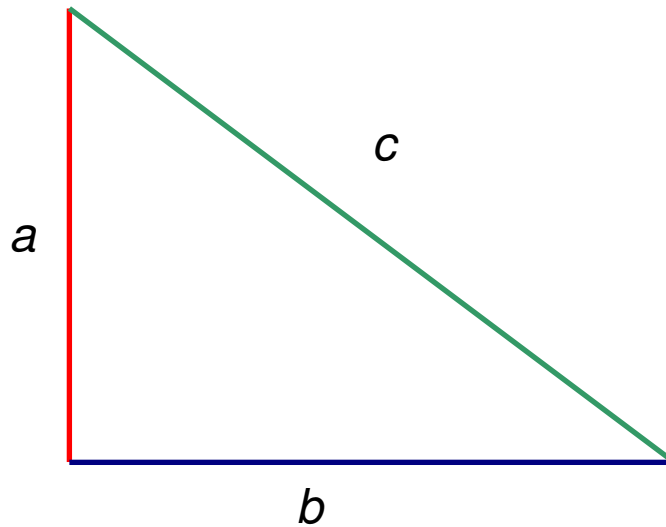
Bible Moralisée, XIII w.



Katedra Monreale, XII w,

# Pitagoras: odkrycie bardzo proste

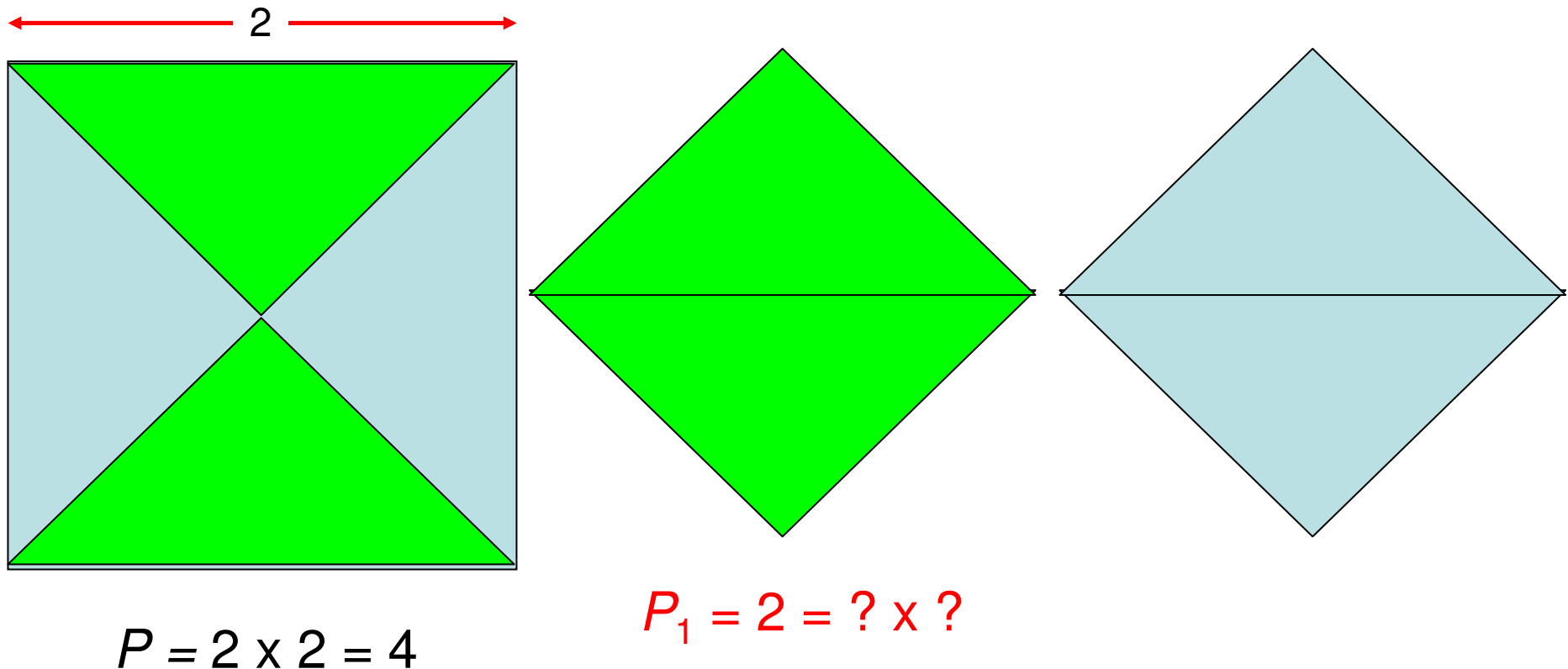
- $9 + 16 = 25$
- $3 \times 3 + 4 \times 4 = 5 \times 5$



$$a^2 + b^2 = c^2$$

# Pitagoras: wstrząsające odkrycie

- Nie wszystkie liczby dadzą się zapisać jak (egipskie) ułamki



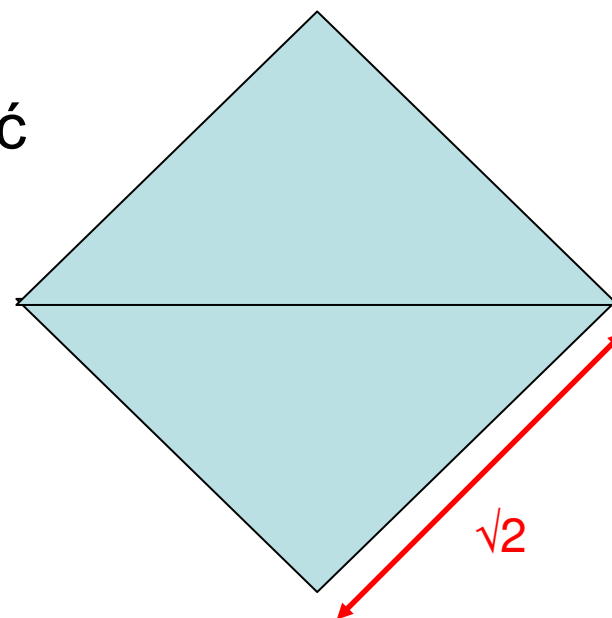
# Liczba „niewymierna”

- Jest tylko jedna liczba, która pomnożona przez siebie daje 2
- Nazwiemy ją „pierwiastek”  $\sqrt{2}$
- $P_1 = 2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$
- Niestety, nie daje się przedstawić jako ułamek

$$\sqrt{2} = 1,4142135\dots$$

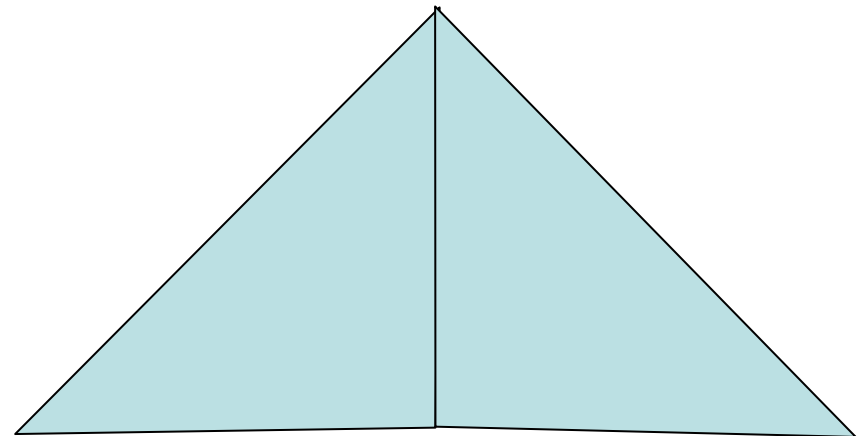
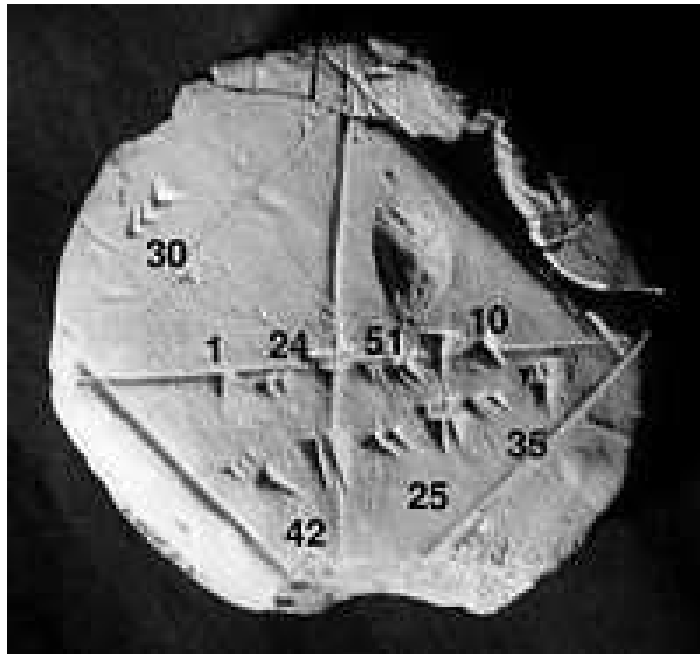
$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488\dots$$

Dlatego nazywamy ją *niewymierną*  
(„nie-racjonalną”, po angielsku)



## Ale to też już znali Babilończycy...

- $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 30547/21600 \approx 1,41421(296)$



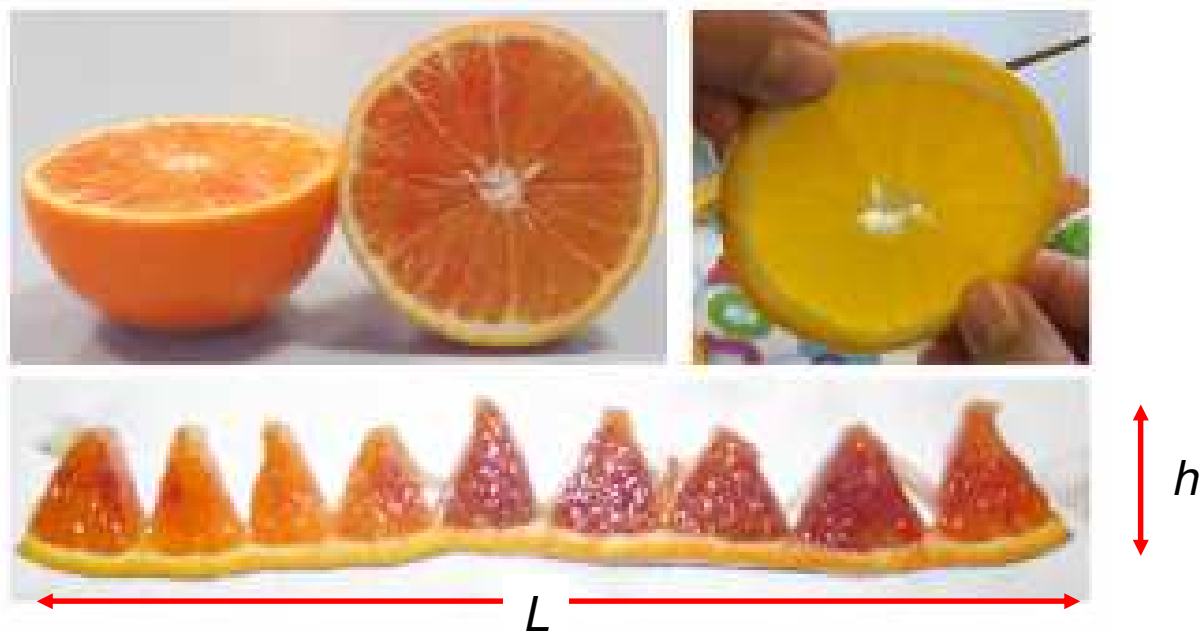
- Dziś znamy  $\sqrt{2}$  z dokładnością do tryliona cyfr...

Babylonian clay tablet [YBC 7289](https://en.wikipedia.org/wiki/YBC_7289) with annotations. Besides showing the square root of 2 in [sexagesimal](#) (1 24 51 10), the tablet also gives an example where one side of the square is 30 and the diagonal then is 42 25 35. The sexagesimal digit 30 can also stand for  $0\ 30 = 1/2$ , in which case  $0\ 42\ 25\ 35$  is approximately 0.7071065

[https://en.wikipedia.org/wiki/Square\\_root\\_of\\_2#Computation\\_algorithms](https://en.wikipedia.org/wiki/Square_root_of_2#Computation_algorithms).

# Ile kawałków ma pomarańcza?

Laura Trivellato, Trento: <https://edulab.unitn.it/dicomat/geometria-ss-i-g/cerchio/larea-del-cerchio/>



Pole trójkąta potrafimy policzyć:  $P = \frac{1}{2} L h$

Czyli: długość skórki (okręgu) x promień / 2

Ile wynosi obwód koła? Musimy to zmierzyć!

Stosunek obwodu koła (=peryferii) do średnicy nazwiemy  $\pi$

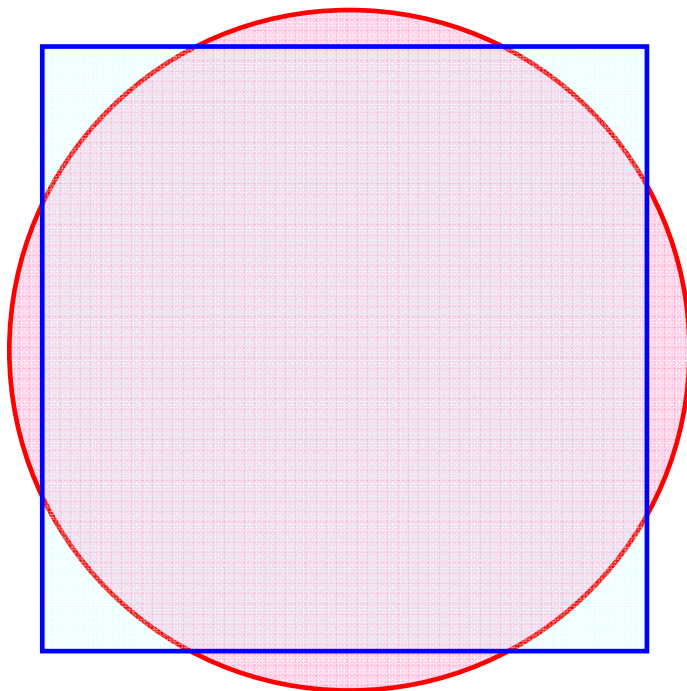
Czyli: stosunek obwodu do średnicy jest dla każdego koła taki sam.

**Ale ile on wynosi?**

# Możemy więc, zrobić z koła kwadrat – ale jak?



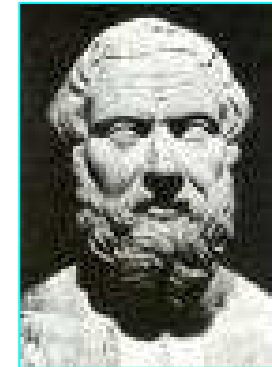
Pisarz Ahmes (papiirus Rind):  
„Odejmij 1/9 od średnicy,  
i na tym co zostanie,  
zbuduj kwadrat”



$$\pi = 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3,16049...$$

Błąd < 1%

# Piramida Cheopsa (1500 p.n.e)

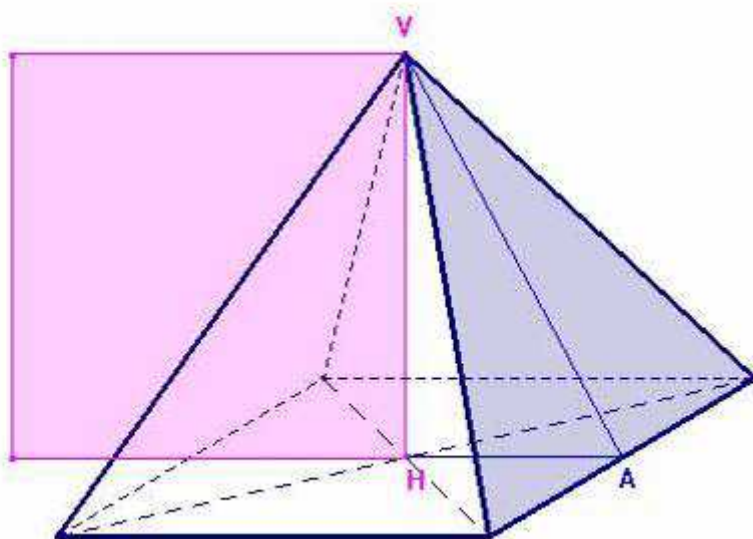


**Herodot zapisał, że Wielka Piramida w Gizie została zbudowana w sposób następujący:**

**Powierzchnia ścian bocznych jest równa kwadratowi o boku równym wysokości piramidy**

l'area di ogni faccia laterale è pari a quella del quadrato costruito sull'altezza.

siano:  $VH = h$ ;  
 $AH = l/2$ ;  
 $AV = a$ .



$$\begin{cases} \frac{l}{2} \cdot a = h^2 \\ h^2 + \frac{l^2}{4} = a^2 \end{cases}$$

Obwód postawy  
wysokość

$$\frac{\text{perimetro di base}}{\text{altezza}} = \frac{4l}{h} = 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}} \cong \pi.$$

Do liczby  $(1+\sqrt{5})/2$  jeszcze wrócimy....

# Archimedes (287-212 a.C.) Syrakuza



TRANSIRE SUUM PECTUS MUNDOQUE POTIRI.

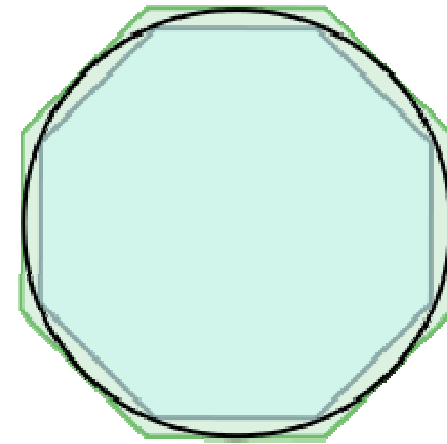
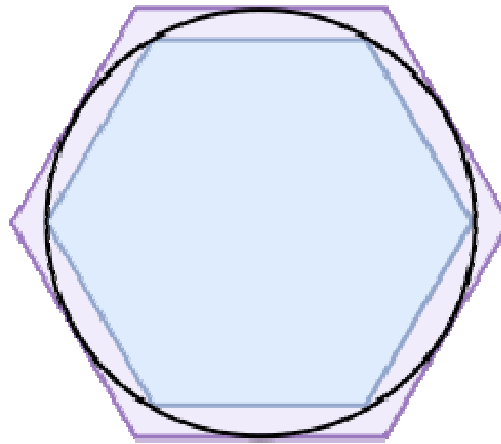
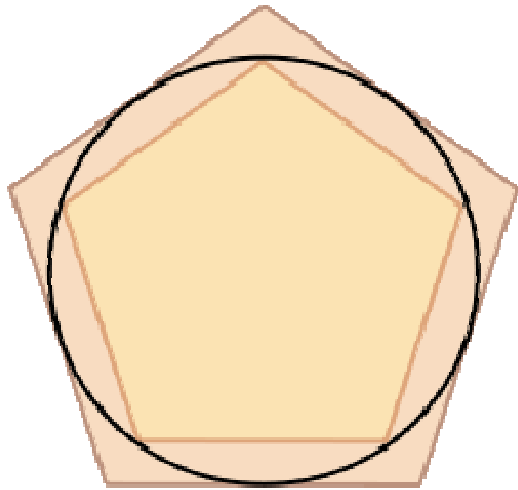
**Przekroczyć własnego ducha i ogarnąć świat**

[Davide Mauro](#) - Opera propria

<https://it.wikipedia.org/wiki/Archimede>

The photos of the Fields Medal (this is the one Grigori Perelman did not accept) were made by Stefan Zachow (ZIB)

# Archimedes

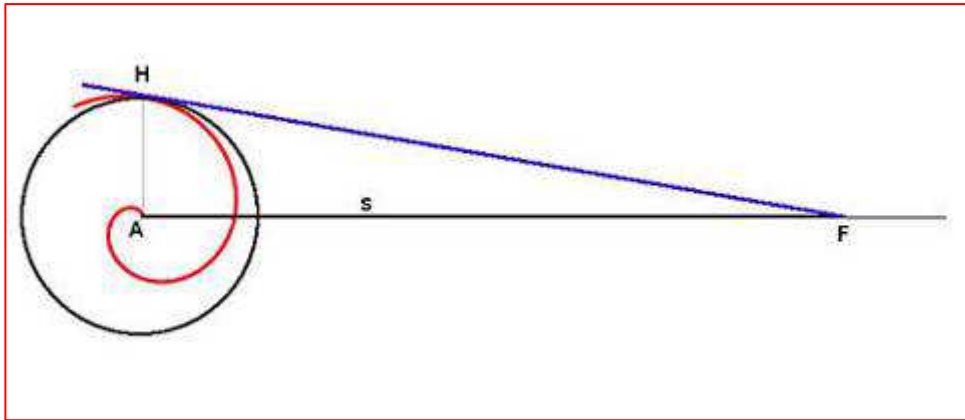


$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$$

$$3,14085 < \pi < 3,14286$$

**Dokładność (średniej = 3,1419) : 0,008%**

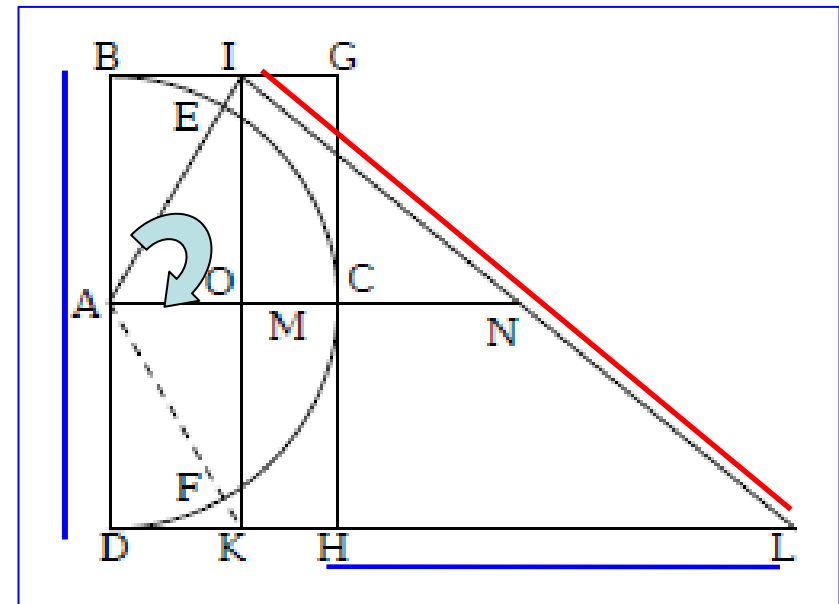
# Rozwinięcie okręgu (Archimedes, Kochański 1685)



$$r(\theta) = a + b\theta$$

FH – styczna do spirali: długość okręgu = AF

[https://it.wikipedia.org/wiki/Spirale\\_archimedeae](https://it.wikipedia.org/wiki/Spirale_archimedeae)

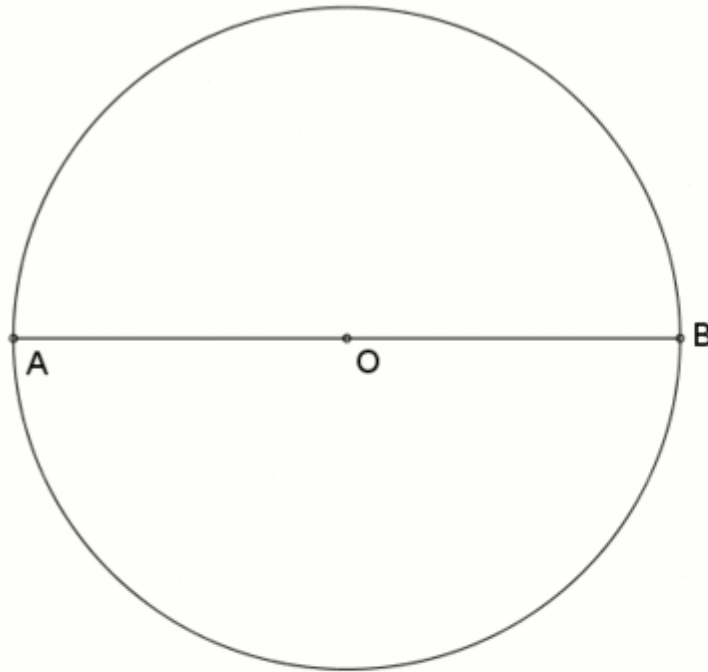


Kochański:  $|IL| = \frac{1}{3} \sqrt{120 - 18\sqrt{3}} = 3.1415333 \dots,$

$$\frac{96}{32} + \frac{4}{32} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{32} + \frac{1}{32 \cdot 32} = \frac{3217}{1024} = 3.1416015625$$

# Srinivasa Ramanujan (1914)

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:01-Squaring\\_the\\_circle-Ramanujan-1914.gif](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:01-Squaring_the_circle-Ramanujan-1914.gif)



$$\pi = \sqrt[4]{9^2 + 19^2/22} \approx 3,1415926525826... \quad \frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{k!^4 (396^{4k})}.$$

Błąd: 0,0000000010071

# Sposoby na obliczenie liczby $\pi$

- $\pi = 4 - 4/3 + 4/5 - 4/7 + 4/9 - 4/11 + 4/13 - \dots$
- $\pi = 3 + 4/(2 \cdot 3 \cdot 4) - 4/(4 \cdot 5 \cdot 6) + 4/(6 \cdot 7 \cdot 8) - 4/(8 \cdot 9 \cdot 10) + \dots$
- $\pi^2/6 = 1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots$
- $\pi/2 = 2/1 \cdot 2/3 \cdot 4/3 \cdot 4/5 \cdot 6/5 \cdot 6/7 \cdot 8/7 \cdot 8/9 \cdot \dots$
- $\pi = 2 \cdot 2/\sqrt{2} \cdot 2/\sqrt{(2+\sqrt{2})} \cdot 2/\sqrt{[2+\sqrt{(2+\sqrt{2})}]} \cdot \dots$  (Viète)
- ...
- **3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971**  
69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899  
86280 34825 34211 7067

# Wyścig trwa

- 31 grudnia 2009 r. [Fabrice Bellard](#) ogłosił, że udało mu się obliczyć  $\pi$  z dokładnością do 2 700 miliardów cyfr. Obliczenia ze sprawdzeniem zajęły 131 dni, do obliczeń użyto komputera z procesorem Intel Core i7 (2,93 GHz) i 6 GB RAM. Sam zapis binarny liczby zajmuje około 1,12 TB[\[3\]](#).
- W roku 2010 obliczono cyfrę będącą na 2 000 000 000 000 000 miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby pi i wynosi ona zero. Obliczenia trwały 23 dni na 1000 maszynach[\[4\]](#).
- W październiku 2011 Alexander J. Yee i Shigeru Kondo uzyskali dokładność ok. 10 bilionów (10<sup>13</sup>) miejsc po przecinku[\[5\]](#). Obliczenia zajęły 371 dni.
- W październiku 2014 anonimowa osoba o nicku *houkouonchi* uzyskała dokładność ok. 13,3 bilionów miejsc po przecinku. Obliczenia zajęły 208 dni, a sprawdzanie 182 godziny[\[6\]](#).
- W listopadzie 2016 Peter Trueb uzyskał dokładność ok. 22,5 bilionów miejsc po przecinku przy pomocy programu y-cruncher [\[1\]](#). Obliczenia zajęły 105 dni, a sama liczba zajęła ok. 120 TB miejsca. [\[6\]](#)

# Archimedes: objętość kuli

Walec o wysokości  $h$  i o podstawie o promieniu  $R$



$$V = \pi R^2 h$$

Stożek o wysokości  $h$  i o podstawie o promieniu  $R$



$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

# Archimedes: objętość kuli

Stożek o wysokości  $h$  i o podstawie o promieniu  $R$



$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Kula o promieniu  $R$



$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

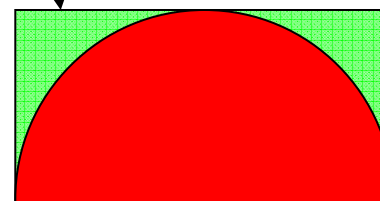
Kula o promieniu  $R$



$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

1/3 objętości walca

$$V_{\text{półkuli}} = \frac{2}{3} \pi R^3$$



$$V_{\text{kuli}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

# Najważniejszy wzór geometrii (3D)

Pole powierzchni kuli  $P = 4\pi R^2$



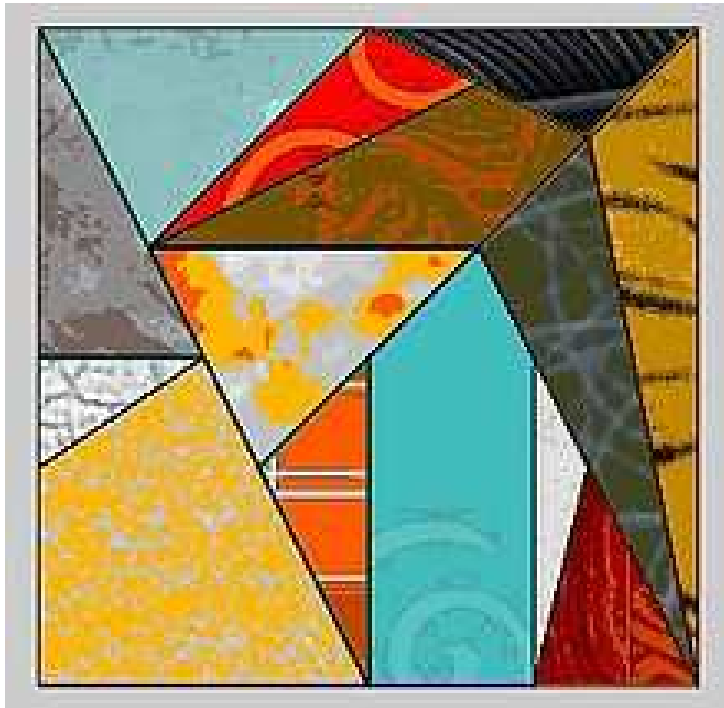
Z tego powodu siły elektryczne  $F = Qq/(\epsilon_0 4\pi R^2)$

Siła grawitacji (Newtona)  $F = GMm/R^2$

I gdyby tak nie było, świat nie byłby trójwymiarowy



# Archimedes vs. Penrose



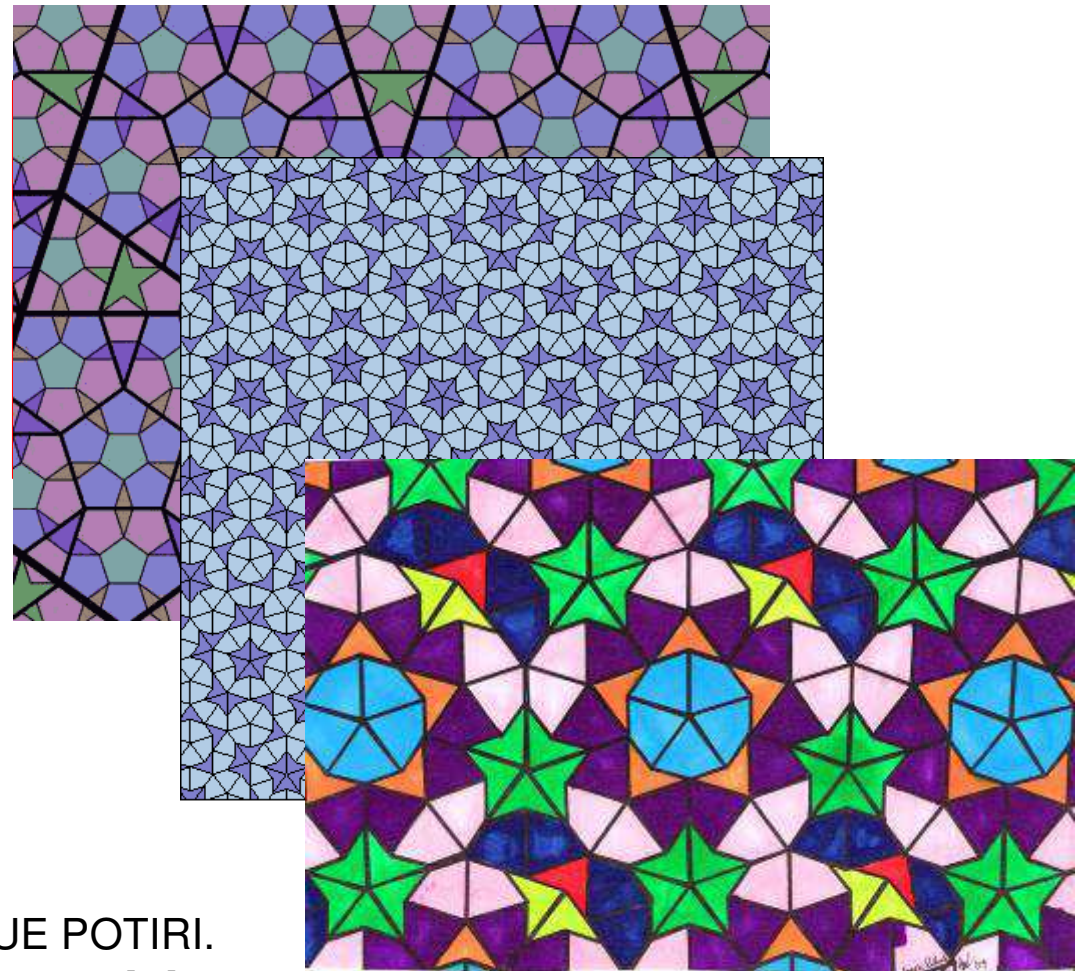
„Tangram”

TRANSIRE SUUM PECTUS MUNDOQUE POTIRI.

**Przekroczyć własnego ducha i ogarnąć świat**

[Davide Mauro](#) - Opera propria

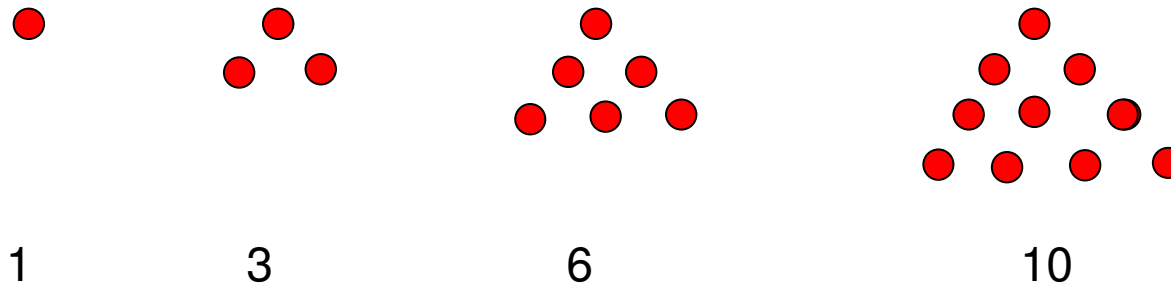
<https://it.wikipedia.org/wiki/Archimede>



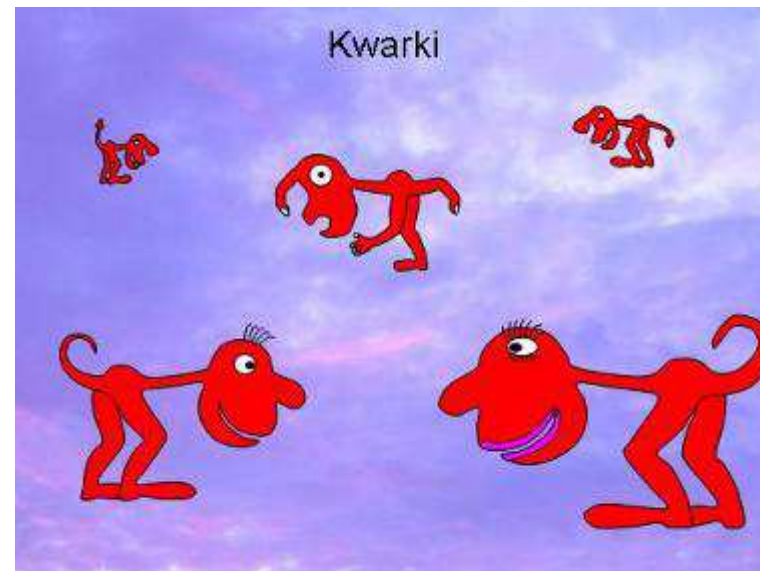
The photos of the Fields Medal (this is the one Grigori Perelman did not accept) were made by Stefan Zachow (ZIB)

# J. Barrow: „Numerologia”

## Pitagoras: liczby „trójkątne”

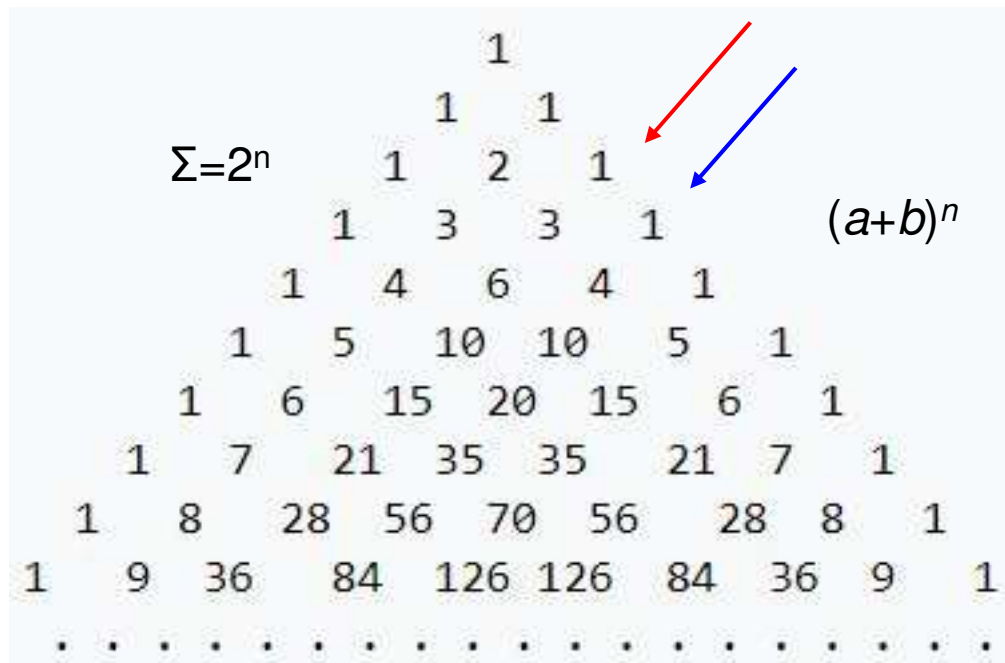


Tutaj spoczywa Jan Gula  
Karabinowa dosięgła go kula.  
Naprawdę nazywał się Orzeł,  
Lecz Orzeł nie rymuje się z kula,  
A z Gula rymować się może.

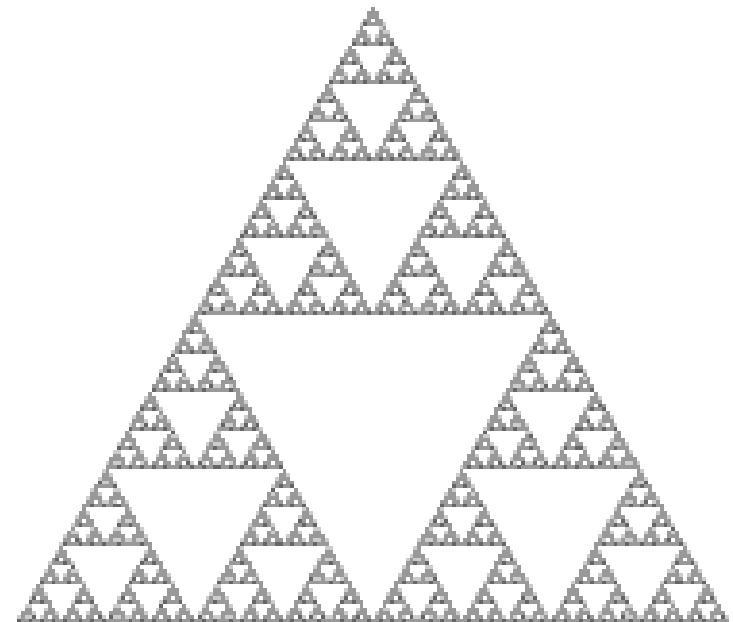


Nie wiemy, dlaczego masy kwarków są takie, a nie inne

# Trójkąt Pascala (Tartagli)



Liczby trójkątne, piramidalne, etc.



## Trójkąt Sierpińskiego (fraktal)

# Ciąg Fibonacciego (1170-1250)

|  |  |  |  |  |   |  |    |  |    |  |     |  |     |  |     |  |     |  |     |  |    |  |    |  |   |
|--|--|--|--|--|---|--|----|--|----|--|-----|--|-----|--|-----|--|-----|--|-----|--|----|--|----|--|---|
|  |  |  |  |  | 1 |  |    |  |    |  |     |  |     |  |     |  |     |  |     |  |    |  |    |  |   |
|  |  |  |  |  | 1 |  | 1  |  |    |  |     |  |     |  |     |  |     |  |     |  |    |  |    |  |   |
|  |  |  |  |  | 1 |  | 2  |  | 1  |  |     |  |     |  |     |  |     |  |     |  |    |  |    |  |   |
|  |  |  |  |  | 1 |  | 3  |  | 3  |  | 1   |  |     |  |     |  |     |  |     |  |    |  |    |  |   |
|  |  |  |  |  | 1 |  | 4  |  | 6  |  | 4   |  | 1   |  |     |  |     |  |     |  |    |  |    |  |   |
|  |  |  |  |  | 1 |  | 5  |  | 10 |  | 10  |  | 5   |  | 1   |  |     |  |     |  |    |  |    |  |   |
|  |  |  |  |  | 1 |  | 6  |  | 15 |  | 20  |  | 15  |  | 6   |  | 1   |  |     |  |    |  |    |  |   |
|  |  |  |  |  | 1 |  | 7  |  | 21 |  | 35  |  | 35  |  | 21  |  | 7   |  | 1   |  |    |  |    |  |   |
|  |  |  |  |  | 1 |  | 8  |  | 28 |  | 56  |  | 70  |  | 56  |  | 28  |  | 8   |  | 1  |  |    |  |   |
|  |  |  |  |  | 1 |  | 9  |  | 36 |  | 84  |  | 126 |  | 126 |  | 84  |  | 36  |  | 9  |  | 1  |  |   |
|  |  |  |  |  | 1 |  | 10 |  | 45 |  | 120 |  | 210 |  | 252 |  | 210 |  | 120 |  | 45 |  | 10 |  | 1 |

|  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|--|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|  |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     | 1   |
|  |     |     |     |     |     |     |     |     |     | 1   |     |
|  |     |     |     |     |     |     |     |     | 2   |     |     |
|  |     |     |     |     |     |     |     | 3   |     |     |     |
|  |     |     |     |     |     |     | 5   |     |     |     |     |
|  |     |     |     |     |     | 8   |     |     |     |     |     |
|  |     |     |     |     | 13  |     |     |     |     |     |     |
|  |     |     |     | 21  |     |     |     |     |     |     |     |
|  |     |     | 34  |     |     |     |     |     |     |     |     |
|  |     |     | ... |     |     |     |     |     |     |     |     |
|  |     | 1   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|  | 1   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|  | 1   | 2   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|  | 1   | 3   | 3   |     |     |     |     |     |     |     |     |
|  | 1   | 4   | 6   | 4   |     |     |     |     |     |     |     |
|  | 1   | 5   | 10  | 10  | 5   |     |     |     |     |     |     |
|  | 1   | 6   | 15  | 20  | 15  | 6   |     |     |     |     |     |
|  | 1   | 7   | 21  | 35  | 35  | 21  | 7   |     |     |     |     |
|  | 1   | 8   | 28  | 56  | 70  | 56  | 28  | 8   |     |     |     |
|  | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Ilość par królików w  $n$ -tym pokoleniu

$$\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$$

Złota proporcja

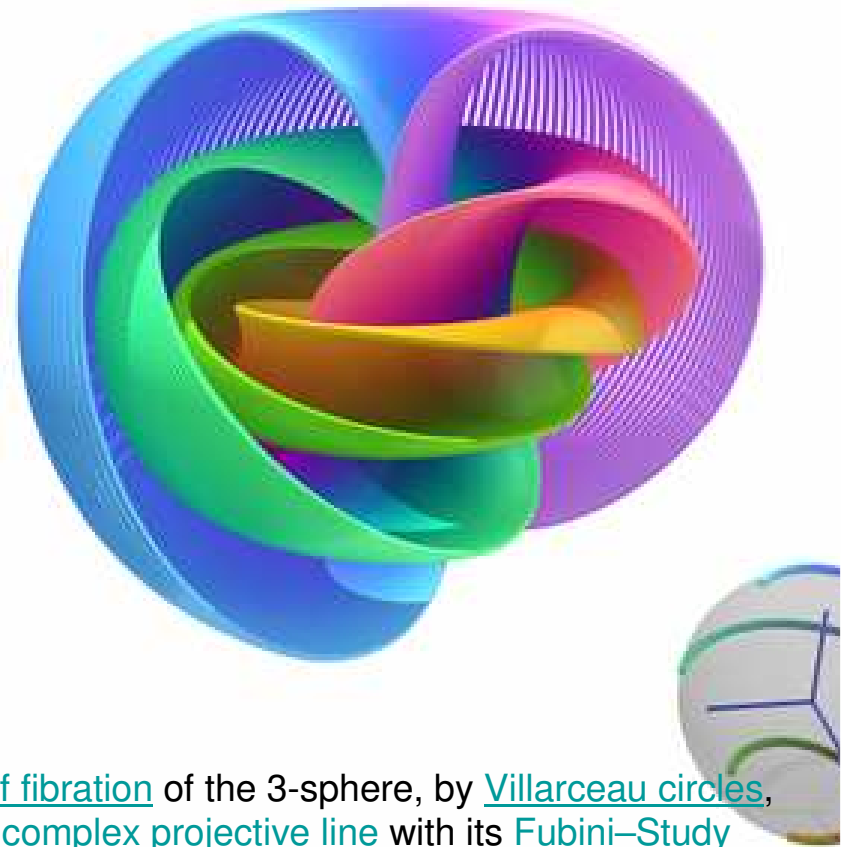
# Złota proporcja



$$a/b = (a-b)b$$

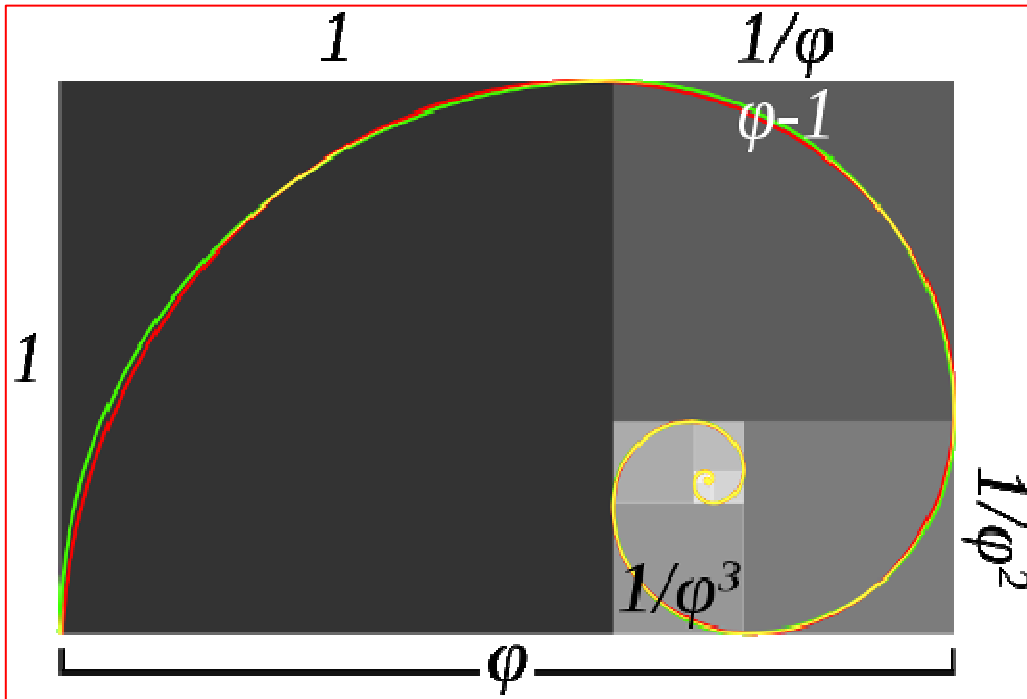
$$a/b = \Phi = (1 + \sqrt{5})/2$$

# Matematyka piękna

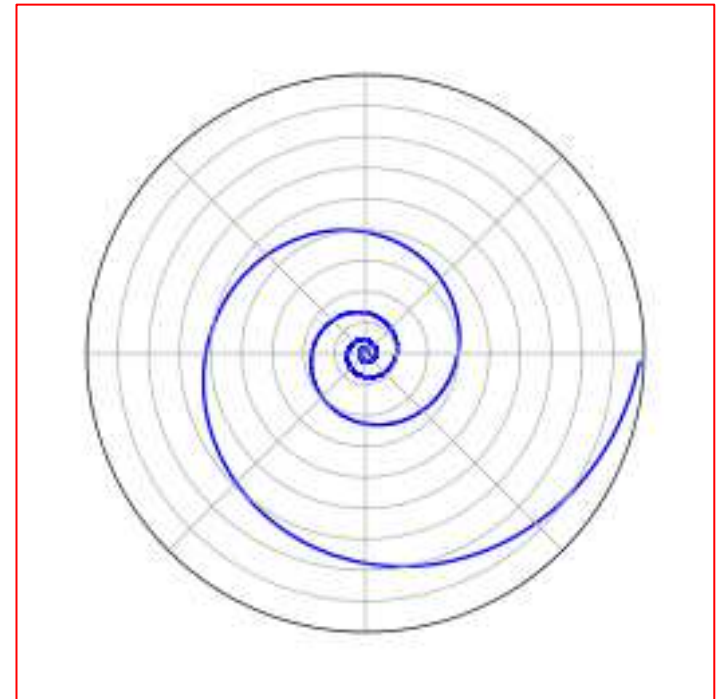


The [Hopf fibration](#) of the 3-sphere, by [Villarceau circles](#), over the [complex projective line](#) with its [Fubini–Study metric](#) (three parallels are shown). The identity  $S^3(1)/S^2(1) = \pi/2$  [is a consequence](#).

# Złota spirala



„Złota” spirala i spirala logarytmiczna



$$r = a e^{b\theta}$$

Promień rośnie  
„ileś” razy z każdym  
obrotem

# Spirala „logarytmiczna”



Muszla nautilusa



Niż nad Islandią

$$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995$$

# Spirala „logarytmiczna”: liczba $e$



Galaktyka „Whirpool” M51



Słonecznik

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} (1/n!) = 1/1 + 1/1 + 1/(1 \cdot 2) + 1/(1 \cdot 2 \cdot 3) + \dots$$

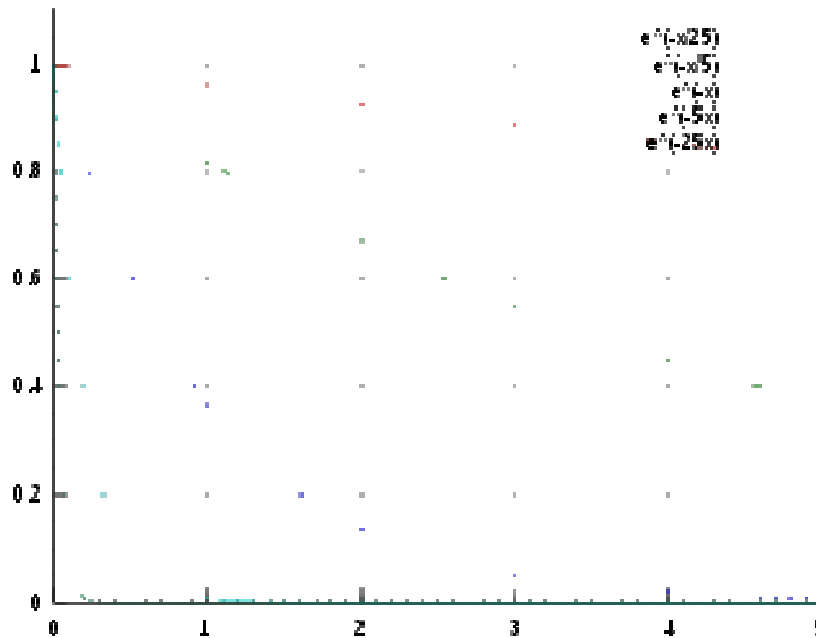
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$$

<http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap050428.html>

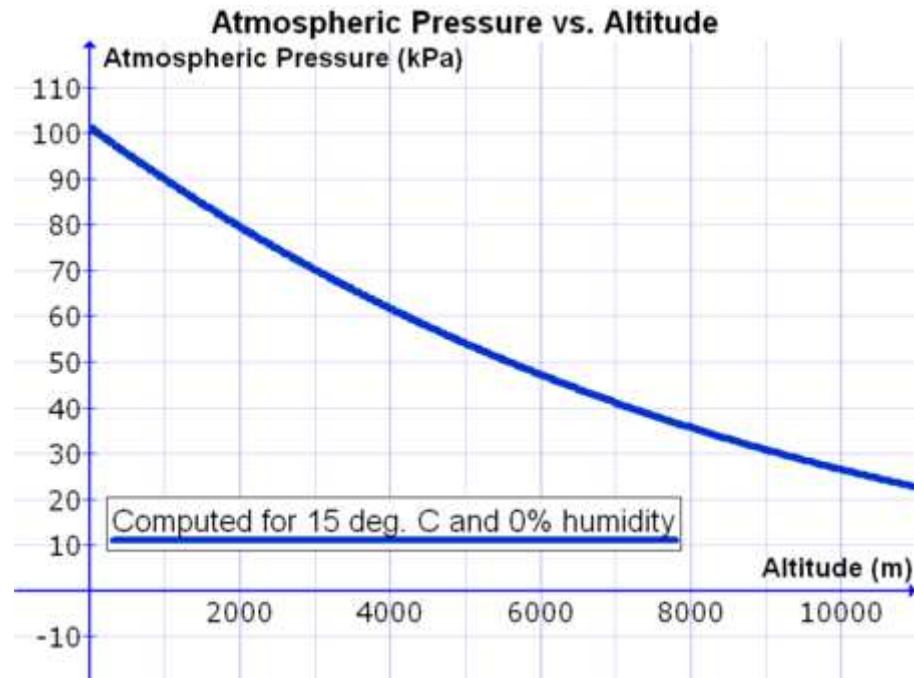
<https://www.daringgourmet.com/wp-content/uploads/2013/06/Sunflower-public-domain-4-sm.jpg>

# Wzrost/ spadek eksponencjalny

$$N = N_0 e^{-t/\tau}$$



O ile  $\pi$  opisuje pewną niezmienniczość (geometrii), to liczbę  $e$  znajdujemy w opisie wszelkiego rodzaju zjawisk zmiennych w czasie.



[Geek.not.nerd](http://Geek.not.nerd)

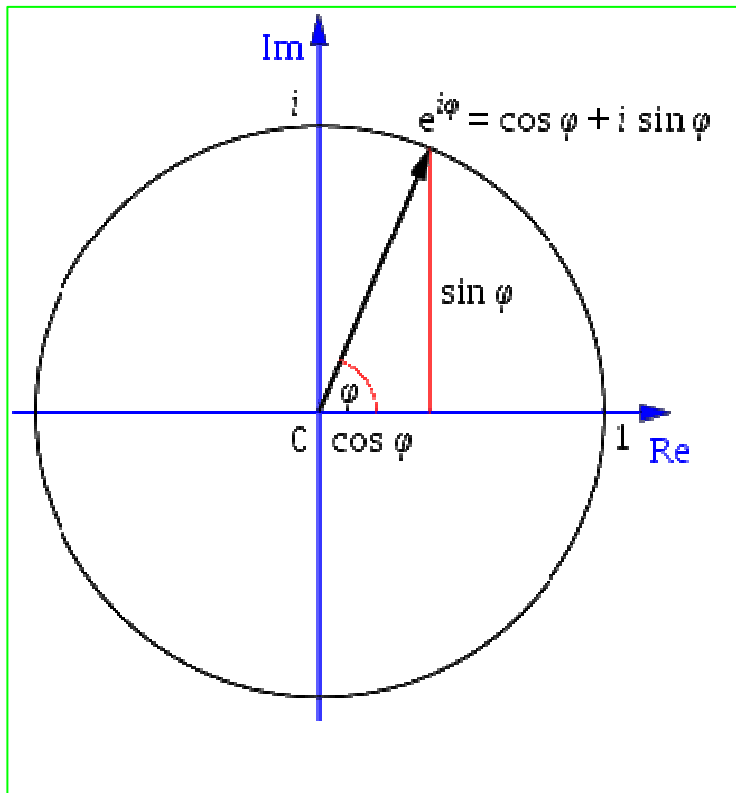
[https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential\\_decay](https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_decay)

[https://en.wikipedia.org/wiki/RC\\_circuit](https://en.wikipedia.org/wiki/RC_circuit)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Atmospheric\\_pressure](https://en.wikipedia.org/wiki/Atmospheric_pressure)

# Najpiękniejszy wzór matematyki

- Jeszcze jedna dziwna liczba  $i = \sqrt{-1}$

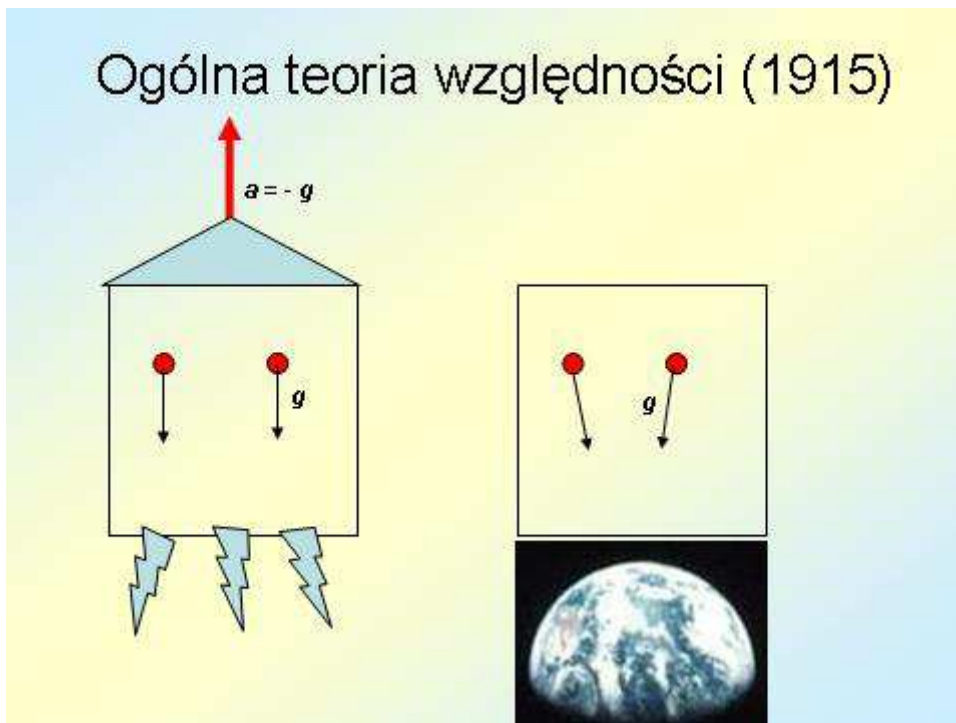


<https://en.wikipedia.org/wiki/Pi>

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Liczbę  $i$  nazywamy „urojoną”, a po angielsku „wymyśloną” – imaginary number

# Najpiękniejszy wzór fizyki



$$\mathbf{G} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{E}$$

Geometria czasoprzestrzeni zależy od materii (masy i energii)  
(we wzorze pominięto tzw. składnik kosmologiczny)

# Dante Aligheri

- Paradiso, XXXIII, 133-135

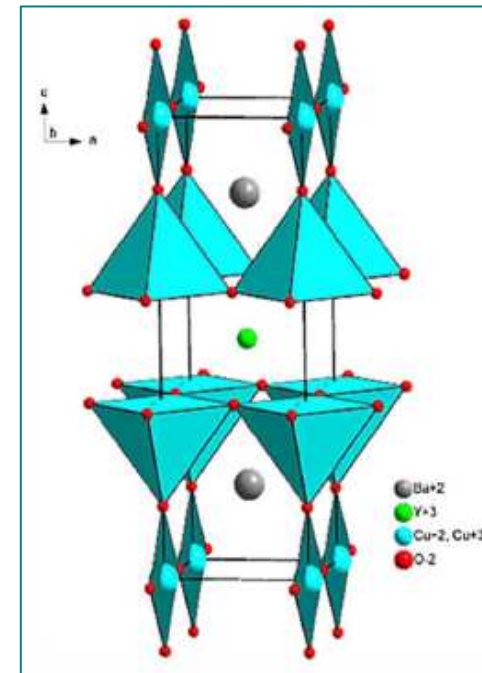
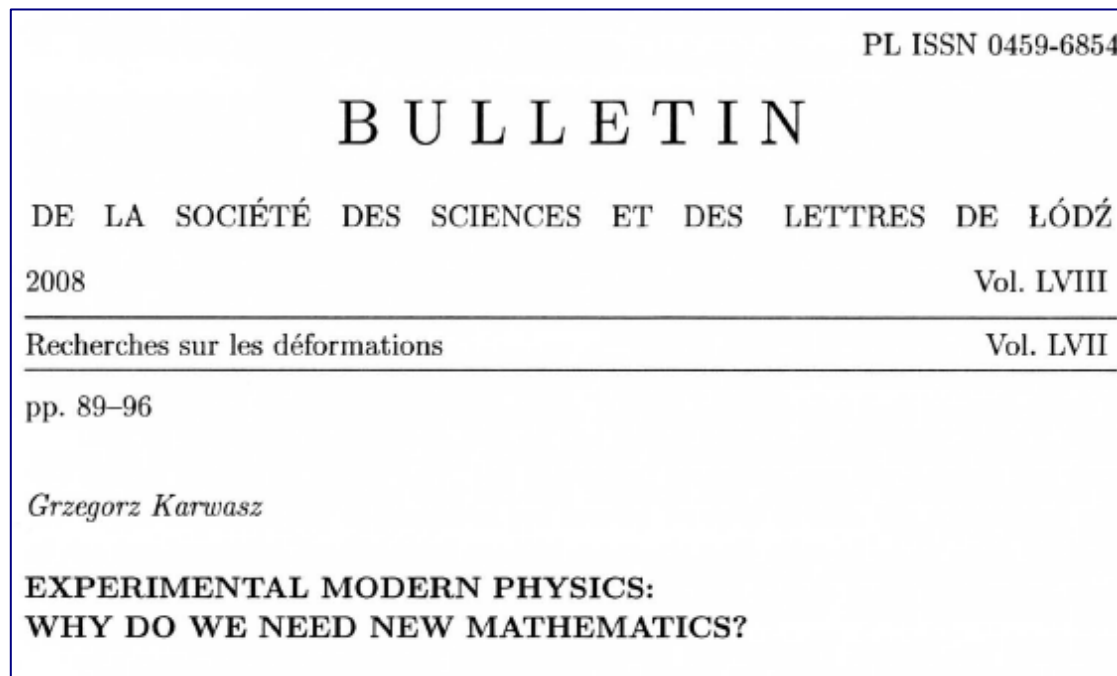


„Qual è 'l geomètra che tutto s'affige  
per misurar lo cerchio, e non ritrova,  
pensando, quel principio ond'elli indige,”

„jak geometra, który wciąż się trudzi,  
by zmierzyć koło, a nic znajduje,  
myśląc, o prawie, tam gdzie go szuka”  
(tłum. GK)

# Co dalej z matematyką?

To co zawsze: pozostają królową nauk



Nadprzewodniki wysokotemperaturowe: przestrzeń fraktalna?

Ciemna energia: nowe geometrie, nie tylko nie euklidesowe ale i nieprzemienne ?

Strzałka czasu: chiralność przestrzeni?

# Literatura

Inż. Stefan Jeleński *Lilivati i Śladami Pitagorasa* (PWN 1970)

Joaquín Navarro, *Tajemnice liczby  $\pi$ . Dlaczego niemożliwa jest kwadratura koła?* Świat jest matematyczny, RBA, Barcelona, 2010

Fernando Corbalán. *Złota proporcja. Matematyczny język piękna*. RBA, 2010

i inne 24 pozycje z tej serii

John D. Barrow, *Stałe natury. O liczbach skrywających najgłębsze tajemnice wszechświata*. Copernicus Center, Kraków, 2017

- <https://pl.wikipedia.org/wiki/Pi>
- <https://en.wikipedia.org/wiki/Pi>
- <https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/ICT/Htmls/Interventi/Articoli/Italia/PiCorgnier/PiCorgnier.html>
- <http://www.angio.net/pi/piquery.html> - tu możesz sprawdzić, czy zadana przez ciebie sekwencja występuje w rozwinięciu dzisiejszym liczby pi.