

Insegnare STEAM con la didattica digitale e la realtà aumentata

Grzegorz Karwasz

*Lezione 5: Matematica – regina delle scienze
Parte II: La matematica per i cittadini*

«La matematica è il nostro sesto senso: un modo simbolico per descrivere la realtà» (Jerome Bruner)

Didattica cognitivista

Lezione 7: Matematica

cioé „la regina delle scienze”

La matematica, come la capacità di leggere i numeri

Parte I: La logica, cioè la capacità di ragionare

Grzegorz Karwasz,

Cattedra della Didattica di Fisica, UMK

dydaktyka.fizyka.umk.pl/Cogito

„Pedagogica Mediale”

Wydział Nauk Pedagogicznych

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Motivazione (1): J. Bruner – la ricerca della teoria di insegnamento nella matematica

- In questa bozza cercherò di formulare una serie di semplici affermazioni sui principi della didattica. Saranno illustrati con gli esempi del insegnamento ed apprendimento della matematica.
- Ho scelto la matematica non perché la considero una materia tipica, visto che la matematica si limita ai problemi ben definiti e non si occupa della loro verifica attraverso gli esperimenti o le osservazioni.
- Avevo scelto la matematica perché costituisce un esempio semplice e chiaro – per forza un po' semplificato – del insieme delle tesi sul insegnamento ed apprendimento [...]
- La teoria dell'insegnamento deve definire i metodi per plasmare un determinato quanto di sapienza in modo tale di renderlo più facile da assorbire [...]
- Il valore della struttura dipende dal fatto, se ha delle capacità di semplificare informazioni, creare nuove affermazioni e allargare la operatività del determinato quanto di conoscenza; la struttura deve essere sempre adeguata alla situazione dello studente e i suoi talenti.

J. Bruner, *Nella ricerca della teoria d'insegnamento*, 1956

http://www.scielo.org.pe/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0254-92472017000200013-

Insegnamento costruttivista

Centralny Pu x ebook multi x Booktab - Lit x interactive e x myZanichelli x Scopri perch x jerome brun x Bruner e la s x

siamomamme.it/bambini/bruner-e-la-sua-teoria-dell'apprendimento/

Bambini

Bruner e la sua teoria dell'apprendimento

3 minuti

Ultimo aggiornamento: 05 dicembre, 2021

La teoria dell'apprendimento di Bruner fornisce gli strumenti precisi affinché i bambini possano elaborare positivamente tutto ciò che assimilano. Si basa sulla motivazione e sull'incoraggiamento alla scoperta di sé stessi.

La teoria dell'apprendimento di Bruner è un importante cambiamento di paradigma

16°C
Soleggiato

22/09/2022 10:21

<https://siamomamme.it/bambini/bruner-e-la-sua-teoria-dell'apprendimento/>

Motivazione: J. Bruner – la matematica come la semplificazione della descrizione del mondo

- „Categoria d'economia della rappresentazione delle nozioni significa un modo in cui la mente deve elaborare un quanto di informazione per assorbirlo e «digerirlo», per ottenere il suo capire.

Per esempio i collegamenti aerei tra cinque: Albany, Boston, Concord, Danbury e Elmira sono seguenti:

- da Boston a Concord
- da Danbury a Concord
- da Albany a Boston
- da Concord a Elmira
- da Albany a Elmira
- da Concorde a Danbury
- da Bostonu a Albany
- da Concord a Albany

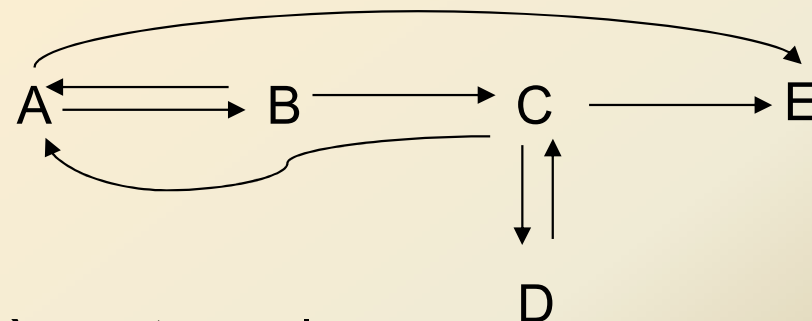
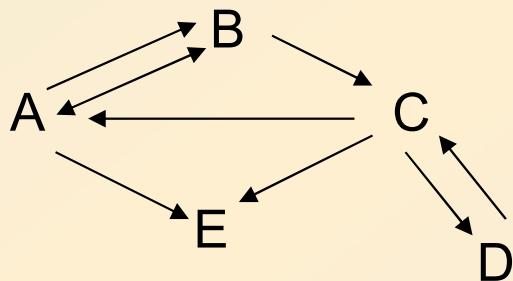


- „Che percorso conviene scegliere per fare il viaggio d'andata e ritorno, da Albany a Danbury?”

Motivazione (1): J. Bruner – matematica come la semplificazione della descrizione del mondo

Per esempio i collegamenti aerei tra cinque città città sono seguenti: Albany, Boston, Concord, Danbury e Elmira:

- da Boston a Concord
- da Danbury a Concord
- da Albany a Boston
- da Concord a Elmira
- da Albany a Elmira
- da Concorde a Danbury
- da Bostonu a Albany
- da Concord a Albany
- „Che percorso conviene scegliere per fare il viaggio d’andata e ritorno, da Albany a Danbury?”



Elmira è una trappola

Motivazione (2): Esame della maturità (in Polonia) 2017

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI POZIOM PODSTAWOWY

DATA: **5 maja 2017 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS PRACY: **170 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

UZUPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

☐

dostosowania
kryteriów oceniania

☐

nieprzenoszenia
zaznaczeń na kartę

☐

dostosowania
w zw. z dyskalkulią

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 26 stron (zadania 1–34). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisz w miejscu na to przeznaczonym.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–25) zaznacz na karcie odpowiedzi, w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego



170 minuti/ (26 pagine + 34 problemi) < 3 minuti per pagina/ problema

Questo è simile a un esame per diventare un ufficiale di alto rango dell'UE
I sussidio didattico che suggerisco per i maturandi – a destra...

I sistemi d'educazione, non solo in Inghilterra, e dalla prima classe della scuola elementare, sono sempre organizzati in modo tale, che tutti dovessero diventare professori universitari ...

Zadanie 1. (0-1)

Liczba $5^8 \cdot 16^{-2}$ jest równa

- A. $\left(\frac{5}{2}\right)^8$ B. $\frac{5}{2}$ C. 10^8 D. 10

Ne la base ne l'esponente sono gli stessi -
bisogna velocemente inventare qualcosa: A

Zadanie 2. (0-1)

Liczba $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$ jest równa

- A. $\sqrt[3]{52}$ B. 3 C. $2\sqrt[3]{2}$ D. 2

Le radici sono si sottraggono - bisogna inventare qlc: C

Zadanie 3. (0-1)

Liczba $2\log_2 3 - 2\log_2 5$ jest równa

- A. $\log_2 \frac{9}{25}$ B. $\log_2 \frac{3}{5}$ C. $\log_2 \frac{9}{5}$ D. $\log_2 \frac{6}{25}$

A che servono logaritmi, poi in base del „2”: rispondo a caso !

E in „programma”* della matematica si riesce a trovare ancora qualcosa?

Zadanie 12. (0–1)

W ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, dane są: $a_1 = 5$, $a_2 = 11$. Wtedy

- A. $a_{14} = 71$ B. $a_{12} = 71$ C. $a_{11} = 71$ D. $a_{10} = 71$

Serie aritmetica, geometrica...

Zadanie 13. (0–1)

Dany jest trzywyrazowy ciąg geometryczny $(24, 6, a-1)$. Stąd wynika, że

- A. $a = \frac{5}{2}$ B. $a = \frac{2}{5}$ C. $a = \frac{3}{2}$ D. $a = \frac{2}{3}$

Zadanie 14. (0–1)

Jeśli $m = \sin 50^\circ$, to

- A. $m = \sin 40^\circ$ B. $m = \cos 40^\circ$ C. $m = \cos 50^\circ$ D. $m = \operatorname{tg} 50^\circ$

E in „programma”* della matematica si riesce a trovare ancora qualcosa?

Zadanie 12. (0–1)

W c

Zadanie 28. (0–2)

A.

Dane są dwa okręgi o środkach w punktach P i R , styczne zewnętrznie w punkcie C . Prosta AB jest styczna do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B oraz $|\sphericalangle APC| = \alpha$ i $|\sphericalangle ABC| = \beta$ (zobacz rysunek). Wykaż, że $\alpha = 180^\circ - 2\beta$.

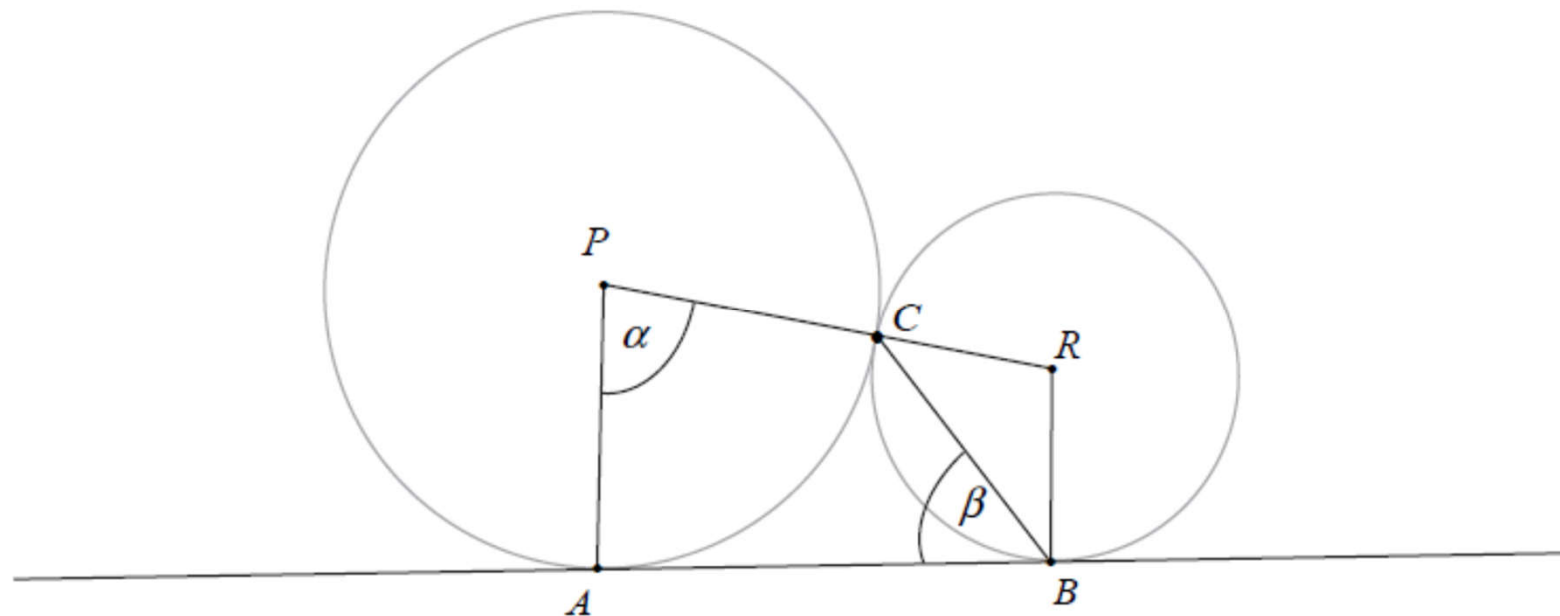
Zad

Dan

A.

Zad

Jeśli



A. $m = \sin 40^\circ$

B. $m = \cos 40^\circ$

C. $m = \cos 50^\circ$

D. $m = \tg 50^\circ$

E in „programma”* della matematica si riesce a trovare ancora qualcosa?

Zadanie 12. (0–1)

W c

Zadanie 28. (0–2)

A.

Dane są dw

Prosta AB j

i $|\sphericalangle ABC| =$

Zad

Dan

A.

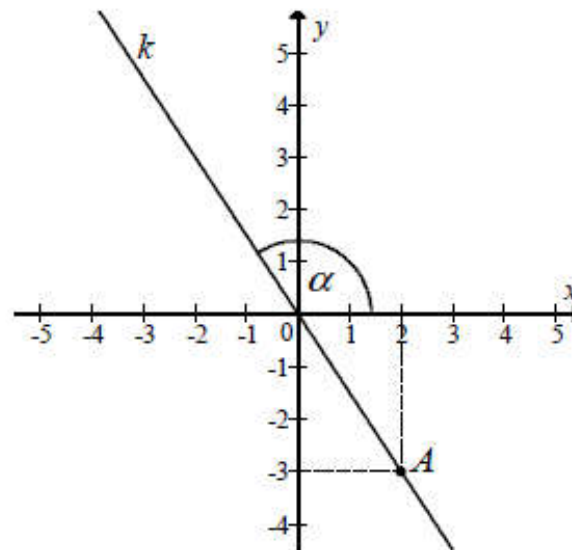
Zad

Jeśli

A. $m = \sin 40^\circ$

Zadanie 18. (0–1)

Na rysunku przedstawiona jest prosta k , przechodząca przez punkt $A = (2, -3)$ i przez początek układu współrzędnych, oraz zaznaczony jest kąt α nachylenia tej prostej do osi Ox .



Zatem

A. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$

B. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}$

C. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$

D. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$

E in „programma”* della matematica si riesce a trovare ancora qualcosa?

Zadanie 12. (0–1)

W c

Zadanie 28. (0–2)

A.

Dane są dw

Prosta AB j

i $|\angle ABC| =$

Zadanie 18. (0–1)

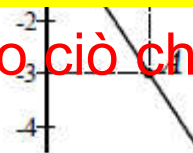
Na rysunku przedstawiona jest prosta k , przechodząca przez punkt $A = (2, -3)$ i przez początek układu współrzędnych, oraz zaznaczony jest kąt α nachylenia tej prostej do osi Ox .



Zad

Che cosa di queste domande crea altre *competenze* oltre quelle «matematiche»? In altre parole, che cosa di queste nozioni servirà nella «vita adulta»?

*dove per il programma intendiamo tutto ciò che qualche «esperto» si è inventato...



Zad

Jeśli

Zatem

A. $m = \sin 40^\circ$

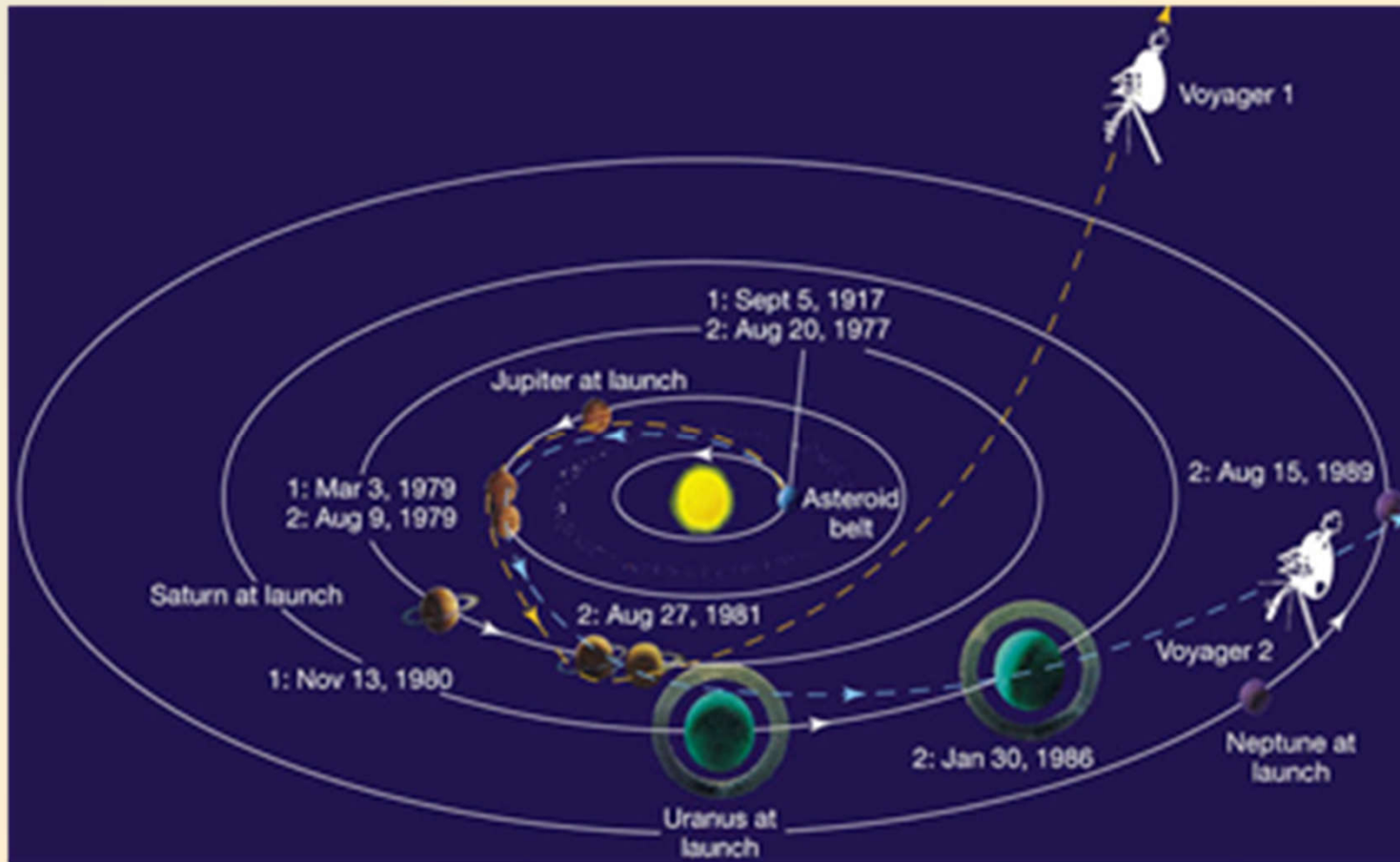
A. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$

B. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}$

C. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$

D. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$

La potenza della matematica: il volo di Voyager



Due sonde, lanciate nel 1977, per 12 anni, come su un filo, hanno volato 6 mld km vicino a tutti i pianeti più grandi, e sono partiti per lo spazio cosmico profondo. Nel 2013 sono arrivate ai confini del Sistema Solara, ma funzionano ancora.

Il volo a Plutone (2005-2015)

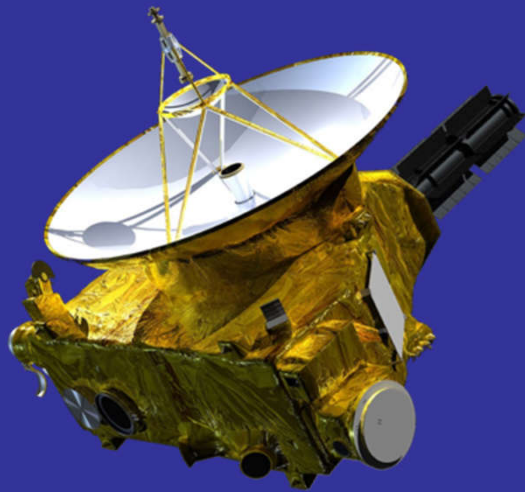


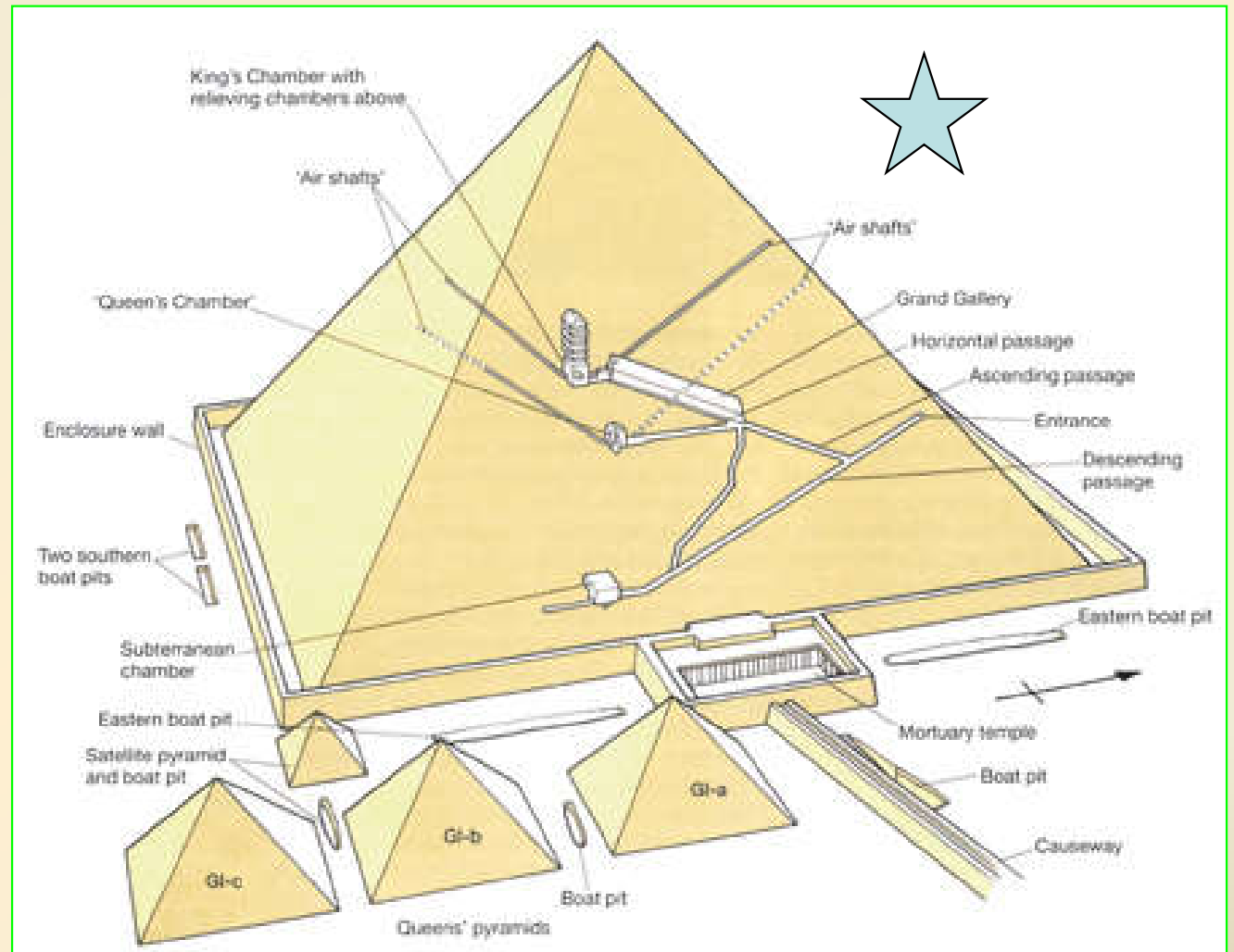
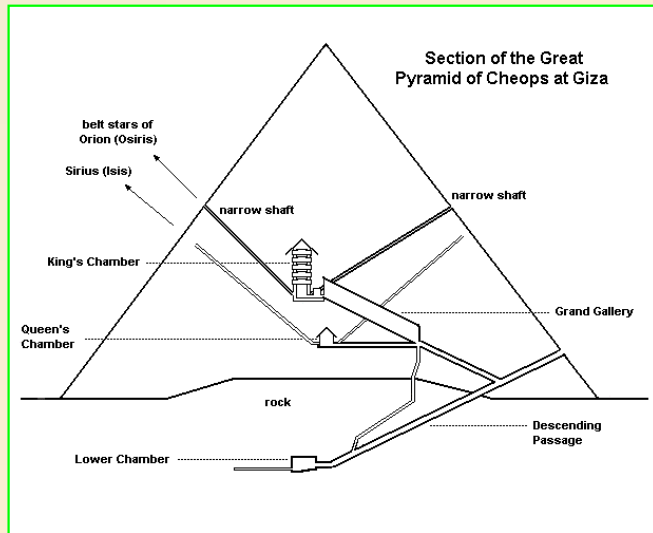
Foto di Plutone fatte il 13.07.2015 r. dalla sonda New Horizons

La distanza dal Plutone: 30 UA. ($\times 150$ mln km = 4,5 mld km)

La sonda sfiorata Plutone a distanza 12 500 km (= diametro della Terra)

Questo corrisponde a centrare la buca di golf dalla distanza di 45 km

La potenza della matematica: la piramide di Cheope



Egizi (2,5 mila a.C.) conoscevano il teorema di Pitagora, numero π (costruivano cerchi!) e le posizioni delle stelle (compreso la Stella Polare, che in quel tempo fu *Tuban*)

http://guardians.net/hawass/articles/news_on_the_robot_Dec_2005.htm

<http://www.greatdreams.com/dogstar.htm>

„Matematica per i cittadini”

„Si può fare la presentazione del libro sulla Matematica, cominciando dalle sue difficoltà? Non è tanto indicato per scopi promozionali...

Lasciando i problemi presenti e stringenti, legati alle relazioni nella classe scolastica e nel ambiente sociale, il motivo della difficoltà essenziale è la divergenza tra i programmi, contenuti e metodi d'insegnamento da una parte, e la percezione che cosa «bisogna» insegnare. I programmi, contenuti e i metodi d'insegnamento hanno la velocità di cambiamenti diversa (molto più lenta) che la percezione della materia del insegnante.

[...] Anche in Italia, finalmente, gli indicatori si spostano in questa direzione.

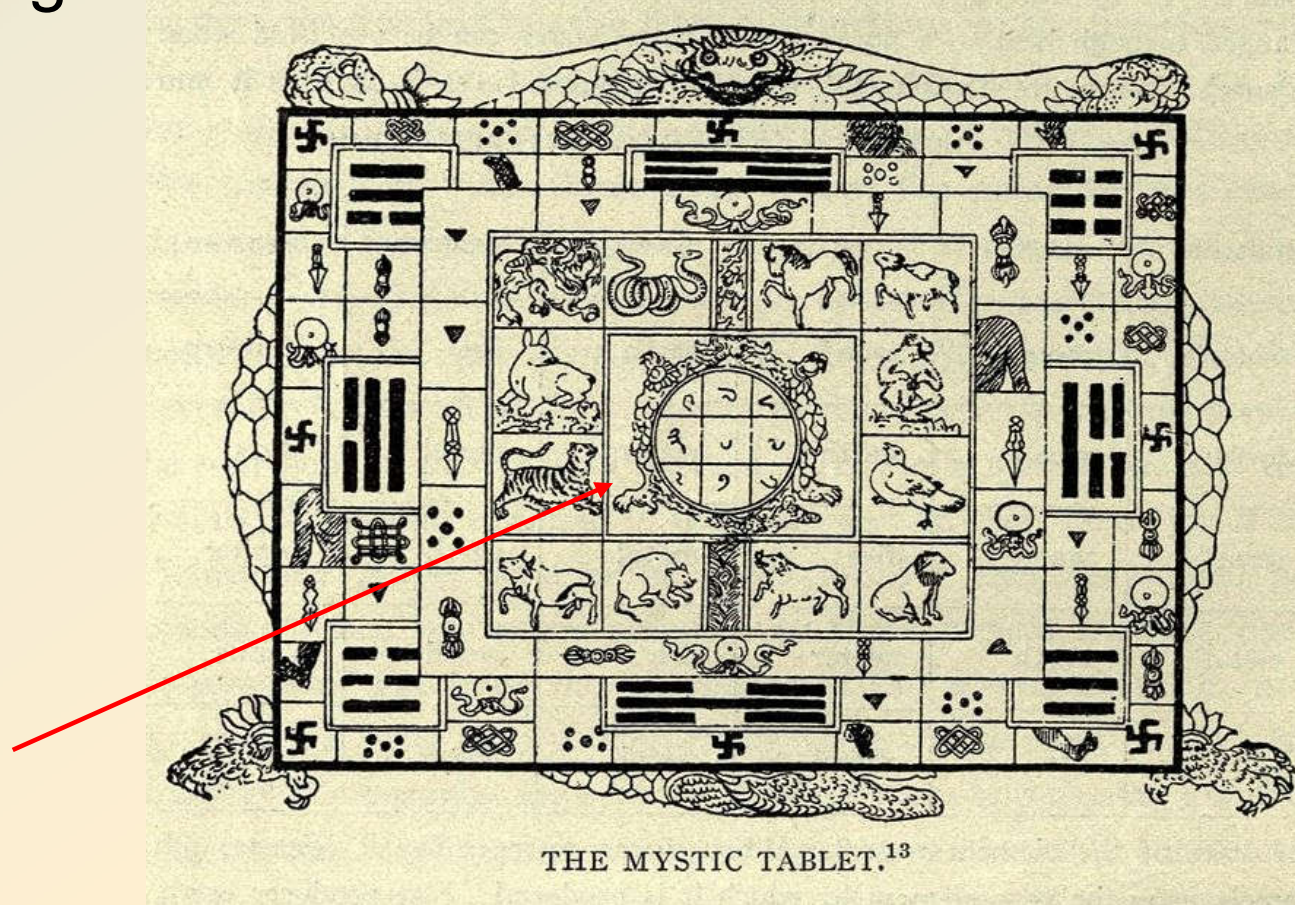
L'insegnamento della matematica non è più riservato per future classi governanti, per futuri insegnanti [e scienziati], ma anche ai ragazzi che nella sua vita faranno tutt'altri mestieri. I matematici sono convinti che il loro linguaggio, loro logica, loro strumenti si rivelano utili anche per i *cittadini* – è questa la terza parola chiave – cioè alle persone che saranno né insegnanti né scienziati.

La matematica serve nella vita quotidiana. Serve a risolvere certe situazioni, dov'è necessario una «veste mentale» (i.e. un'attrezzatura). È il nostro sesto senso, un ulteriore canale di comunicazione e d'interpretazione della realtà.”

Angelo Guerraggio, *Introduzione*, in: Barozzi, Bergamini, Boni, Cerani, Pagani, *La matematica per il cittadini*, Zanichelli, Bologna, 2008, p 7 traduzione dal polacco GK

„Matematica per cittadini”

1. Quadrato magico (Cina, IV secolo AC: le somme nelle righe, nelle colonne e lungo le diagonali sono identiche



Barozzi, Bergamini, Boni, Cerani, Pagani, *La matematica per il cittadini*, Zanichelli, Bologna, 2008, str. 12

English: The "Mystic Tablet". According to Carus' explanation, it contains, on the shield of a tortoise (alluding to the animal that has revealed the *Eight Trigrams* to Fu Xi, and which was, in more canonical accounts, a "dragon horse") a chart with the 8 Trigrams, the 12 figures of Chinese animal cycle, etc. The centerpiece is another, smaller, tortoise, the one that revealed the *Luoshu* magic square to Yu the Great. https://en.wikipedia.org/wiki/Lo_Shu_Square#/media/File:Carus-p48-Mystic-table.jpg

Quadrato magico

Lo Shu: usa tutte le cifre, da 1 a 9 e la somma è eguale a 15

	5	

4	5	6

=15

7		
4	5	6
4		

8		
4	5	6
3		2

8		7
4	5	6
3		2

8	0	7
4	5	6
3	10	2

quasi bene...

Quadrato magico

Lo Shu: usa tutte le cifre, da 1 a 9 e la somma è eguale a 15

	5	

3	5	7

=15

4		
3	5	7
8		6

4		2
3	5	7
8		6

4	9	2
3	5	7
8	1	6

=15

8	1	6
3	5	7
4	9	2

anche questo bene...

Operazioni di simetria

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8	1	6
3	5	7
4	9	2

+1

5	10	3
4	6	8
9	2	7

=18

2	9	4
7	5	3
8	1	6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

La matematica: il regno di simboli

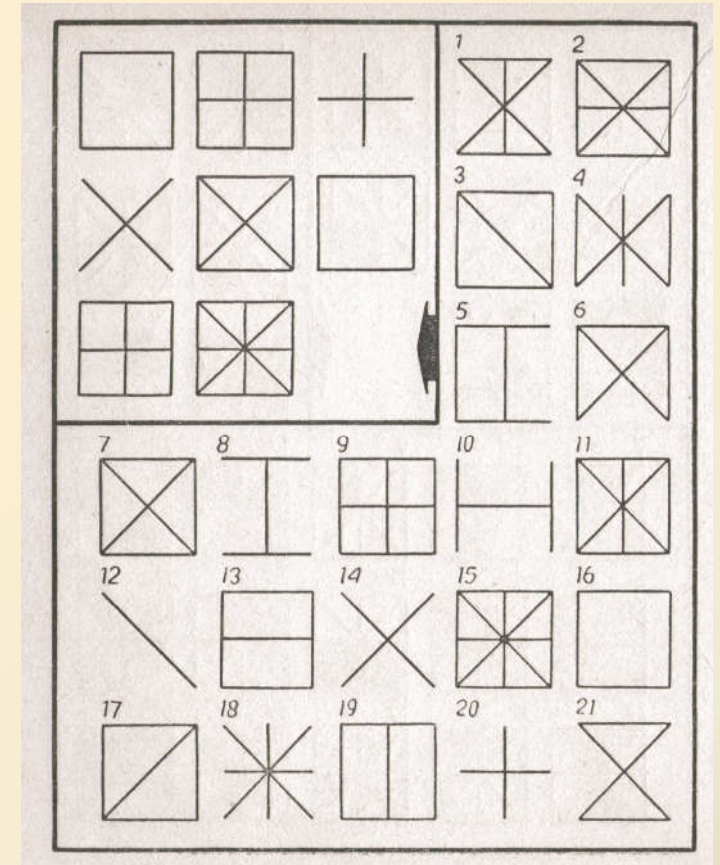
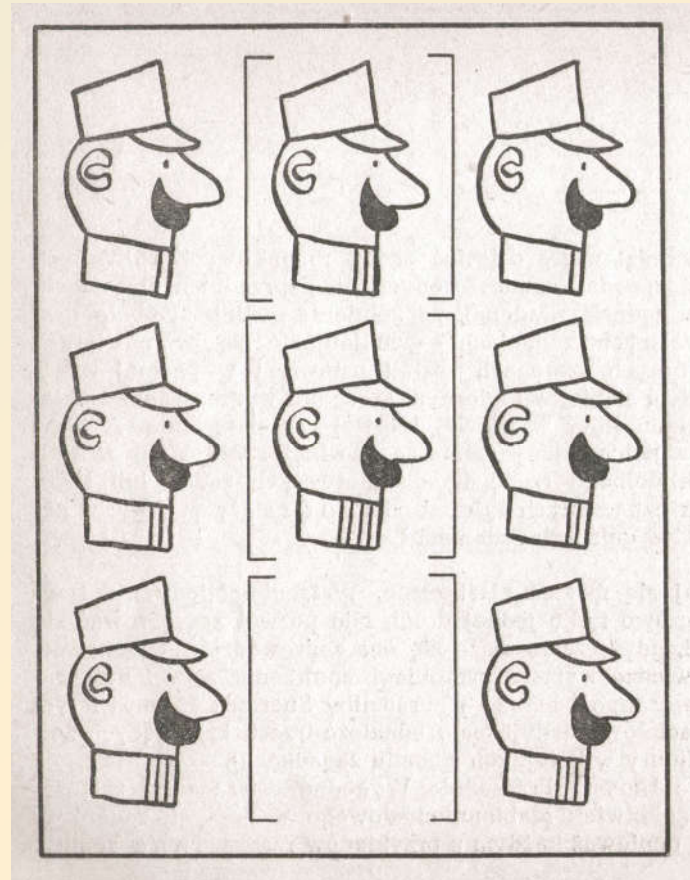
a	b	c
d	5	e
f	g	h

$$\begin{aligned}a + b + c &= 15 \\d + e &= 10 \\f + g + h &= 10 \\a + d + f &= 15 \\b + g &= 10 \\c + e + h &= 15 \\a + h &= 10 \\c + f &= 10\end{aligned}$$

8 equazioni, 9 incognite
→ il sistema di equazioni
ha più di una soluzione

La soluzione generale produce la condizione che la somma di «controllo» deve essere uguale a $3k$, che k è il numero nella cella centrale.

Logica: Il gioco di pensare



Zdzisław Nowak, *Cercando la ragione nella testa (la logica divertente)*.
Zagadki, algebrasy, anegdoty, łamigłówki. Wydawnictwo Harcerskie, Warszawa, 1970

La matematica: un metodo di analisi

- „Silvia cambia la casa. Da tre imprese di trasporti ha ricevuto tre diverse offerte di trasloco.”
- Impresa A: fino 200 kg il costo fisso 500 €; oltre 200 kg – costo fisso 500 € e 1 € per ogni kg oltre 200 kg.
- Impresa B: costo fisso 425 € + 0,75 € per ogni kg
- Impresa C: - fino a 300 kg il costo fisso 400€ + 1 €/kg; oltre 300 kg costo fisso stała 700€ + 0,5 € per ogni kg oltre 300 kg.
- Che impresa conviene scegliere se Silvia deve trasportare $t=400$ kg?

A: $K = 500$ quando $t < 200$ kg; $K = 500 + 1 \cdot (t - 200)$ quando $t > 200$

B: $K = 425 + 0,75 t$

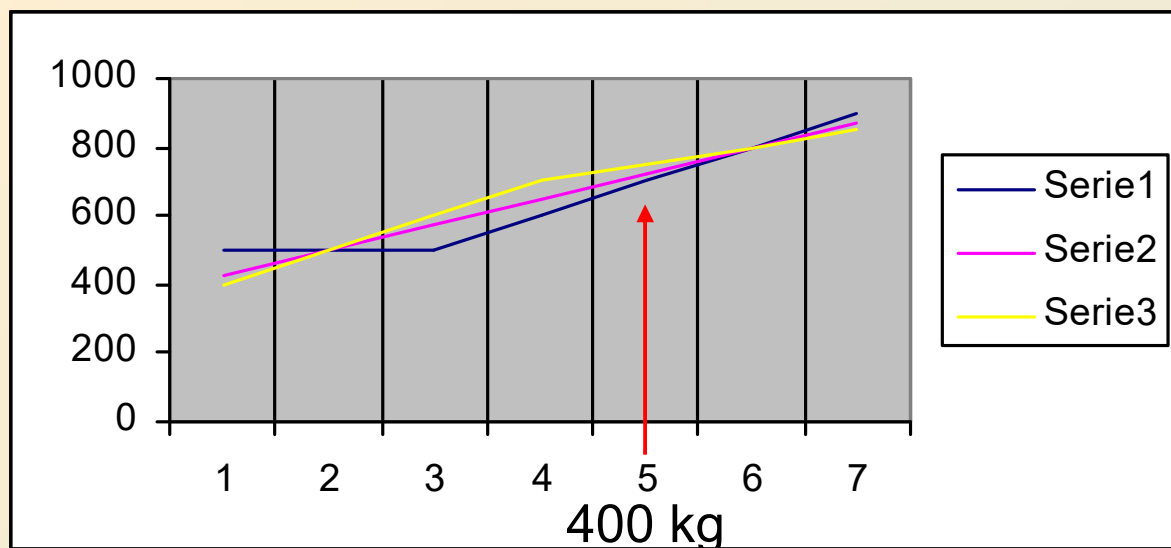
C: $K = 400 + 1t$, quando $t < 300$; $K = 700 + 0,5 \cdot (t - 300)$

Controlliamo le condizioni di “cucito”. A: 500 € per 200 kg. C: 700 € per 300 kg

- **Ci salva solo il grafico...**

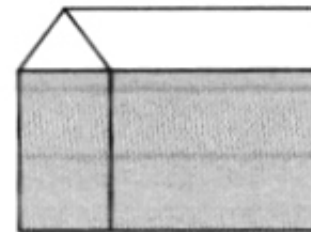
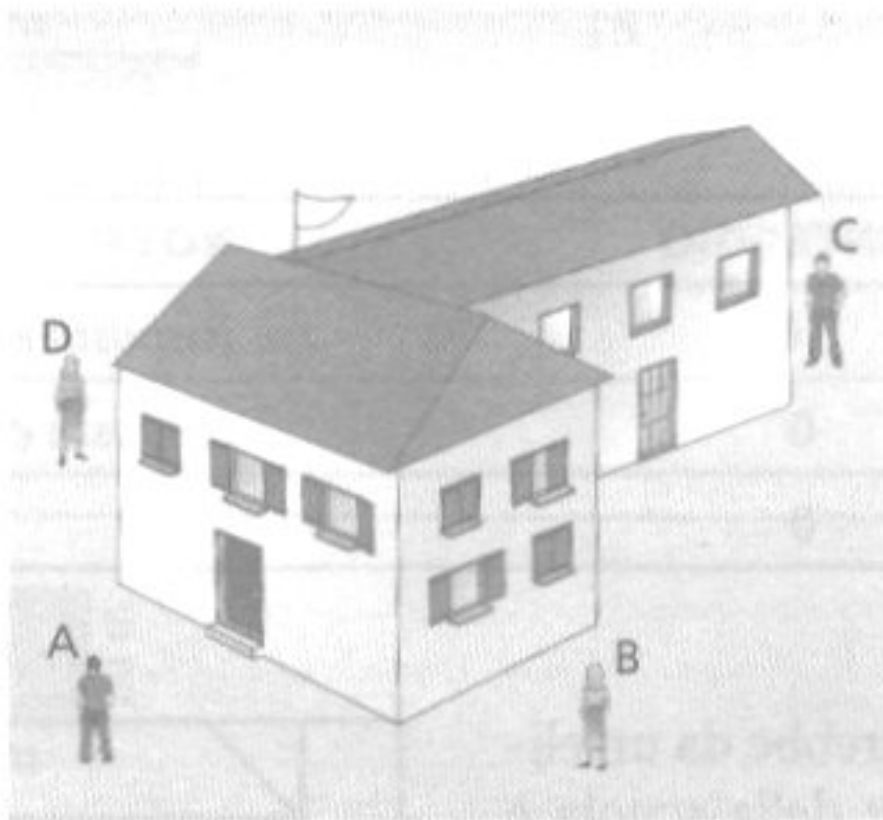
Il grafico da Excella è un pò tragico...

Risposta: Impresa A

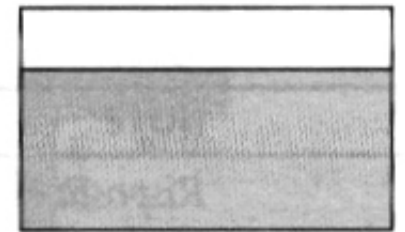


La matematica: la formazione dell'immaginazione

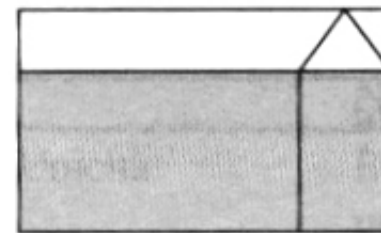
Quattro studenti guardano la scuola da diversi lati.
Assegna le vista ai ragazzi



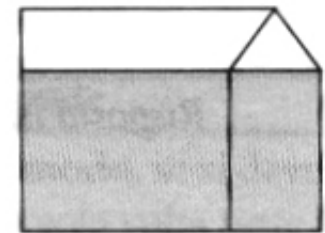
1



3



2



4

Risposta: 1=B, 2=C, 3=A, 4=D

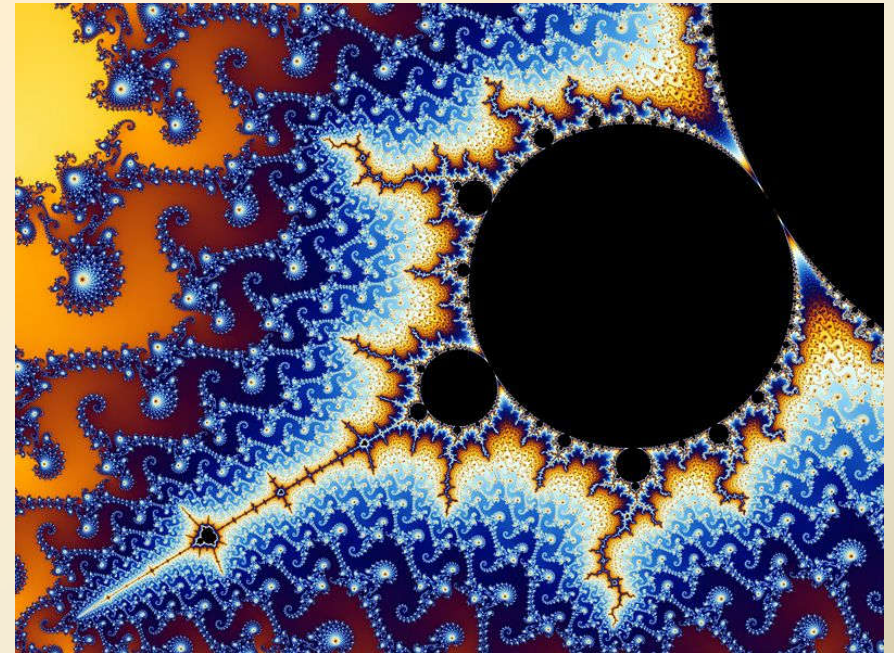
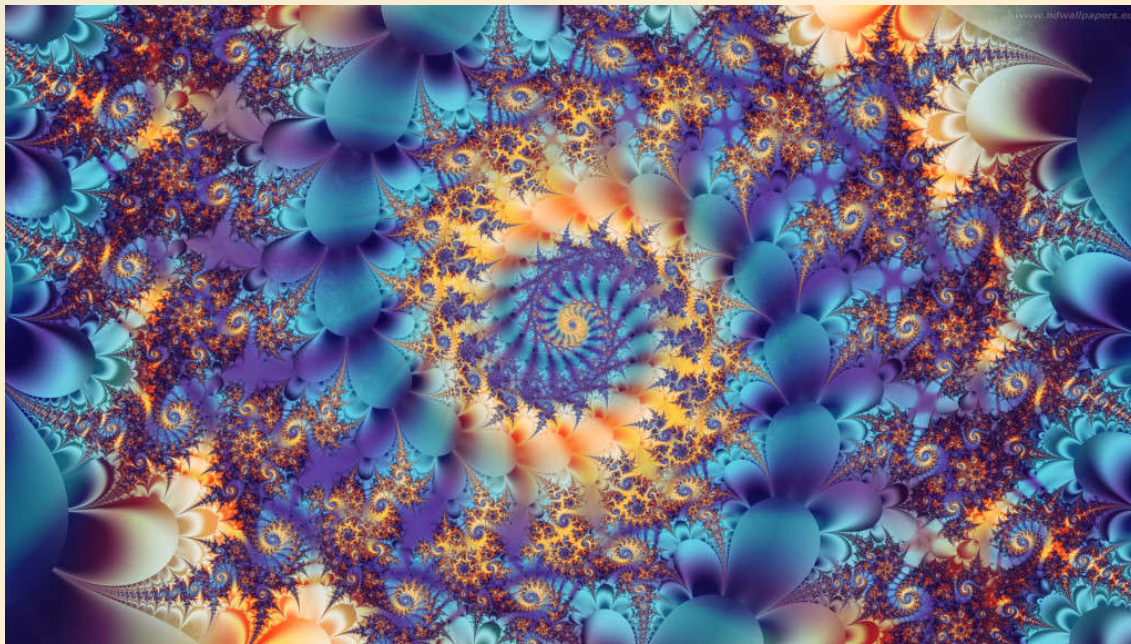
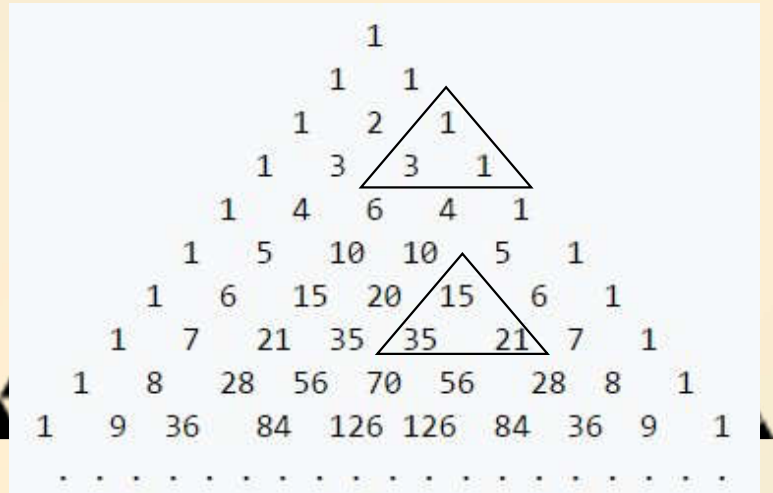
Un compleanno insieme: la probabilità

- „Qual è la probabilità che in una classe di 30 bambini due ragazzi festeggiano il compleanno nello stesso giorno?
- La maggioranza pensa che molto bassa, ma però non è così.
- Cominciamo dal calcolo che due ragazzi *non* festeggiano il compleanno lo stesso giorno.”
- La probabilità che la prima persona festeggia il compleanno in qualche giorno del anno ammonta a $365/365$
- La probabilità che la seconda persona *non* festeggia il compleanno lo stesso giorno è $364/365$ (può festeggiare in qualsiasi giorno, tranne quel determinato).
- La probabilità congiunta ammonta a $(365/365) \times (364/365) = 0,9973$
- La probabilità che tre ragazzi festeggiano nei giorni diversi ammonta a $365/365 \times (364/365) \times (363/365) = 0,9918$
- La probabilità che *nessuno* di 30 ragazzi festeggia lo stesso giorno ammonta a $(365/365) \times (364/365) \times \dots \times (336/365) = 0,2937$
- Questo significa che la probabilità che almeno due ragazzi di 30 festeggiano lo stesso giorno ammonta a $1 - 0,2937 = \mathbf{0,7063}$
- Nella classe di **40 ragazzi nella classe** la probabilità del compleanno in comune ammonta a **89%!**

Pere Grima, *Sicurezza assoluta e altre funzioni. I segreti della statistica.*

RBA Barcelona, 2010, Serie: il mondo è matematico, p. 73

Wacław Sierpiński: Frattali



La funzione esponenziale (il credito ipotecario)

Adamo e Eva comprano un appartamento e vogliono un mutuo ipotecario per il valore di 200 mila euro..

- Adesso, pur i crediti ipotecari hanno i tassi d'interesse elevati. Il tasso reale (compreso le spese nascoste) può superare persino **5%** in base annua.
- Gli stipendi di Adamo e Eva (lui è cacciatore, lei una giardiniera) ammontano insieme a 5 mila euro.
- La banca A propone il mutuo per 12 anni. La banca B – per 24 anni.
- Facciamo una valutazione grossolana della somma complessiva degli interessi in questi due casi.
- Sappiamo, che la banca richiede prima di pagare la quota di interessi, e solo dopo comincia a scalare la quota base del mutuo. Assumiamo, per semplicità, che lo scalare della base cominci dopo $\frac{2}{3}$ del periodo del mutuo.
- Calcola la cifra totale da pagare (con gli interessi). Calcola la rate mensile.
- Calcola la cifra disponibile per Adamo ed Eva per le spese quotidiane, dopo aver sottratto la rata del mutuo e le spese fisse della casa (gas, luce, acqua).

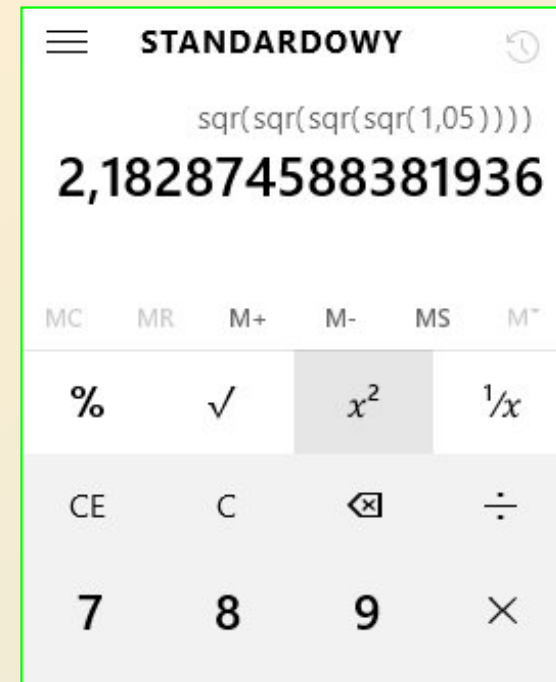
Le funzioni esponenziali (cont.)

- **Gli interessi 5%** annui significa che dopo un anno la quota di prestito venga moltiplicata per 1,05, nel anno successivo ancora per 1,05 etc. Cioè dopo 10 anni abbiamo

$$(1,05)^{10} = 1,629 \text{ (circa)}$$

Nel esercizio, per semplificare, assumiamo che la base degli interessi è uguale a tutta la somma in prestito per 2/3 della durata, cioè 16 anni in 1° caso e 8 anni in secondo

- Se non abbiamo la calcolatrice che permette ottenere direttamente $(1,05)^8$ (e non abbiamo voglia di moltiplicare 8 volte 1,05), possiamo utilizzare il tasto x^2 sulla calcolatrice, usando la relazione $x^8 = x^{2 \cdot 2 \cdot 2} = ((x^2)^2)^2$
- Sulla calcolatrice scriviamo 1,05, e poi schiacciamo tre volte il tasto x^2 oppure 4 volte (per x^{16}). I risultati sono



Funzioni esponenziali (cont.)

- Calcoliamo adesso le quote totali da pagare per il mutuo do 200 mila euro
- $A = 200 \text{ mila} \cdot 1,477 = \mathbf{295 \text{ mila}}$ (cioè 95 mila di interessi)
- $B = 200 \text{ mila} \cdot 2,183 = \mathbf{436 \text{ mila}}$ (czyli 236 mila di interessi)
- Le rate mensili ammontano a:
- $A = 295 \text{ mila} / (144 \text{ mesi}) = \mathbf{2052 \text{ €/ mese}}$
- $B = 436 \text{ mila} / (288 \text{ mesi}) = \mathbf{1514 \text{ €/ mese}}$

Risposta In questo modello matematico, nonostante gli interessi più alti, «conviene» fare il muto per.

Nota 1! In caso del mutuo per **48 anni**, le rate mensili, con lo stesso modelleo, sarebbero di **1654 €** e la quota totale da pagare **953 mila €** (cioè il quadruplo della quota base). Controlla!

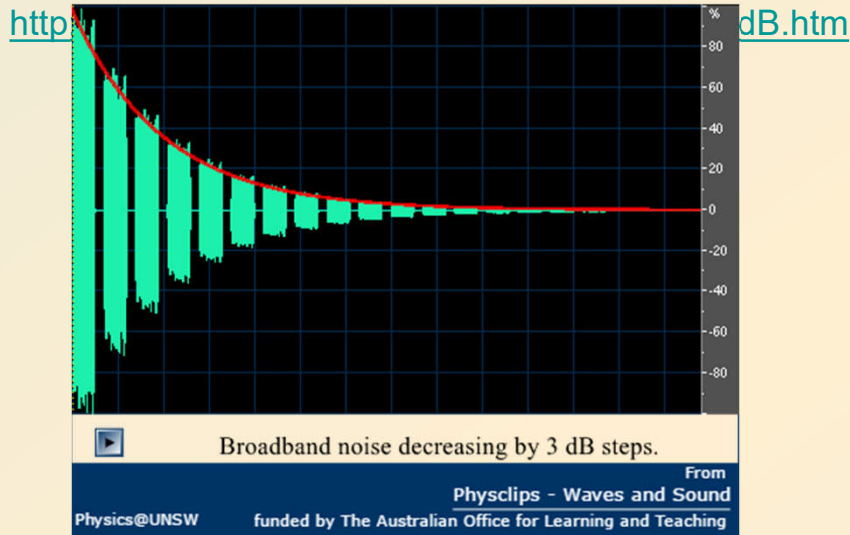
Nota 2! Con gli interessi del 8% le rate mensili con il mutuo di 12 anni aumentano a **2571 €** e resino a **2379 €** con 24 anni del mutuo.

Chiedi alla banca i dettagli del finanziamento in diversi varianti, prima di fare il mutuo!

PS. Non chiedere il finanziamento nelle valute diverse dal tuo stipendio (fu così in Argentina)....

I logaritmi sono da per tutto

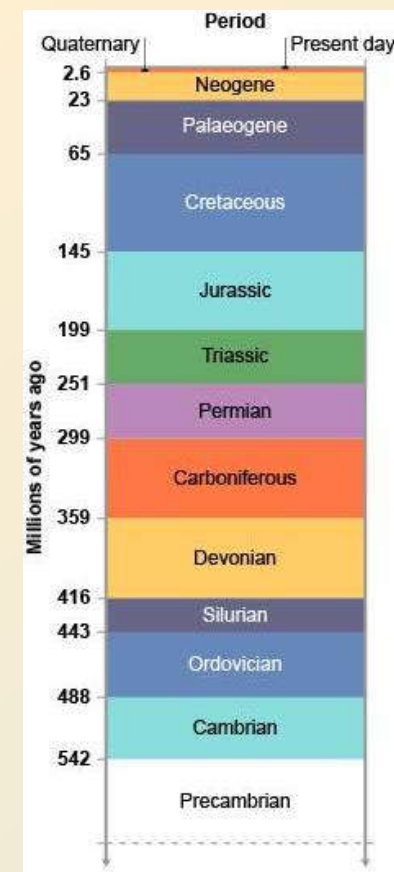
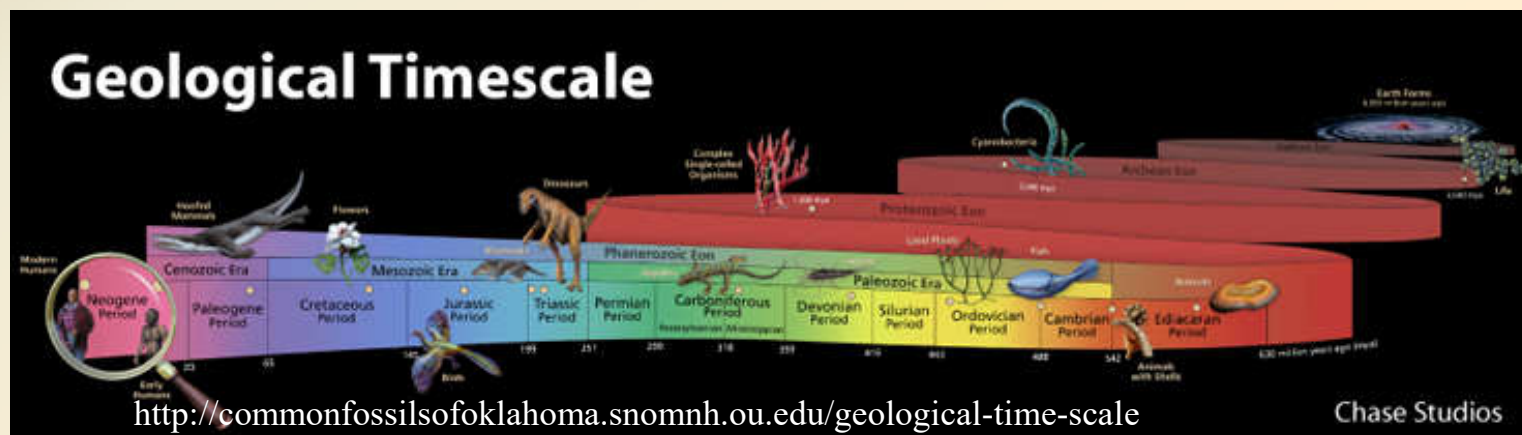
- Quando diciamo «cento volte più grande» usiamo proprio la scala logaritmica: due zeri in più.
- L'occhio umano vede proprio in scala logaritmica: dalla caverna buia (qualche fotone al secondo) fino al disco brillante del sole (10^{21} fotoni/m²/s) – cioè 15-16 „ordini” di grandezza
- Anche l'orecchio: 120 dB vuol dire la differenza della potenza 10^{12} volte (12 ordini di grandezza, oppure un milione di milioni volte)



- **pH = 5** significa, che la concentrazione di ioni d'idrogeno H^+ ammonta a 10^{-5}
pH = 3 vuol dire che il numero di ioni H^+ rispetto al numero di molecole di H_2O è come 1:1000, pH=8 è una soluzione «abbastanza» acida
- Le stelle appena visibili con occhio nudo hanno la grandezza „6” (Ipparco, II sec. AC). La stelle di grandezza „5” è 2,5 volte più luminosa che «6». Vuol dire, che tra la „5” a „0” (la stella più brillante del Orione) la differenza in potenza è di 100 volte.

Il logaritmi sono dappertutto

- Anche la storia dell'universo, della Terra, della vita sulla Terra, l'evoluzione dell'uomo e la storia umana conviene mostrare in scala logaritmica



5×10^9	5.000.000.000	Formazione della Terra
5×10^8	500.000.000	I primi vertebrati
5×10^7	50.000.000	Mammiferi
5×10^6	5.000.000	I primati (umanoidi)
5×10^5	500.000	L'uomo (di Neandertal)
5×10^4	50.000	L'uomo di <i>Cro Magnon</i> (<i>Homo sapiens</i> in Europa)
5×10^3	5.000	Le prime civiltà (e la scrittura)
5×10^2	500	La stampa e la scienza moderna (Copernico)
5×10^1	50	Televisione e computer
5×10^0	5	Smartfon (semi-intelligenti)

Idea: Jerome Bruner, *op. cit.*, p. 60

Le domande dell'esame di maturità – i professori universitario, in particolare if fisici e matematici riescono a risolverli ...,

Zadanie 1. (0–1)

Liczba $5^8 \cdot 16^{-2}$ jest równa

Il numero $5^8 \cdot 16^{-2}$ ammonta a

A. $\left(\frac{5}{2}\right)^8$

B. $\frac{5}{2}$

C. 10^8

D. 10

Notiamo che $16=2^4$; allora si ottiene $5^8 \cdot 2^{-8} = (5/2)^8$

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$ jest równa

A. $\sqrt[3]{52}$

B. 3

C. $2\sqrt[3]{2}$

D. 2

Notiamo che $54=2 \cdot 27$; allora $\sqrt[3]{54}=3\sqrt[3]{2}$; la risposta C

Zadanie 3. (0–1)

Liczba $2\log_2 3 - 2\log_2 5$ jest równa

A. $\log_2 \frac{9}{25}$

B. $\log_2 \frac{3}{5}$

C. $\log_2 \frac{9}{5}$

D. $\log_2 \frac{6}{25}$

La differenza dei logaritmi, vuol dire il logaritmo del rapporto, (i.e. $3/5$) e $2\log x = \log x^2$; risposta A

Conclusioni:

- La matematica è la regina delle scienze
- È impossibile da capire perché la matematica si capisce (Einstein)
- È impossibile da capire perché la matematica corrisponde al mondo esterno (piramidi, orbite di pianeti, meccanica quantistica, crittografia quantistica, geometria dell'Universo etc.)
- Ma insegnare la matematica senza far vedere la sua *utilità* è socialmente inutile! [Comenius: si insegna solo questo che è utile immediatamente]
- Allora bisogna scegliere: insegniamo le formule *oppure* le dimostrazioni *oppure* un veloce e possibilmente logico indovinare la risposta (una «approssimazione») *oppure* la matematica utile nella vita adulta (*per decodificare la realtà fisica/ sociale/ storica*)
- perché, come mostrano gli esempi di libri, per es. polacchi, le conoscenze didattiche di autori sono spesso molto limitate...
- È assolutamente necessario prendere la Matematica sul serio, come la *competenza sociale*, alla pari con la grammatica e ortografia.

Amici matematici/ fisici/ biologi!

Forse meglio non stressare ma creare una passione cognitiva?

Bibliografia

- Zdzisław Nowak, *Po rozum do głowy (wesota logika)*. [cercando la ragione dentro la testa] *Zagadki, algebry, anegdoty, łamigłówki*. Wydawnictwo Harcerskie, Warszawa, 1970
- Barozzi, Bergamini, Boni, Cerani, Pagani, *La matematica per il cittadino*, Zanichelli, Bologna, 2008
- Ian Steward, *Histerie matematyczne. Giechy e divertimenti con la matematica*, Oxford University Press, 2004
- Ian Steward, *17 equazioni che hanno cambiato il mondo*, Prószyński i Ska, Varsavia 2013
- Tony Crilly, *50 mathematical ideas you really need to know*, Quercus Publishing, London, 2007, ed. wł. 2009 Dedalo
- Giuliano Spirito, *Matematica senza numeri*, Il Sapere „100 pagine 1000 lire. Tascabili Economici Newton, Roma, 1995
- J. Bruner, *Nella ricerca della teoria dell'insegnamento*, Harvard 1966
- Pere Grima, *La certezza assoluta e altre funzioni. I segreti della statistica*. RBA Barcelona, 2010, **Serie: Il mondo è matematico e altri 39 libri di questa serie...**

Didattica cognitivista

Lezione 7: Matematica

cioè „la regina delle scienze”

Matematica, come la capacità di leggere numeri

Parte II: Statistica, come una «leva» sociale

Grzegorz Karwasz,

Cattedra della Didattica di Fisica, UMK

dydaktyka.fizyka.umk.pl/Cogito

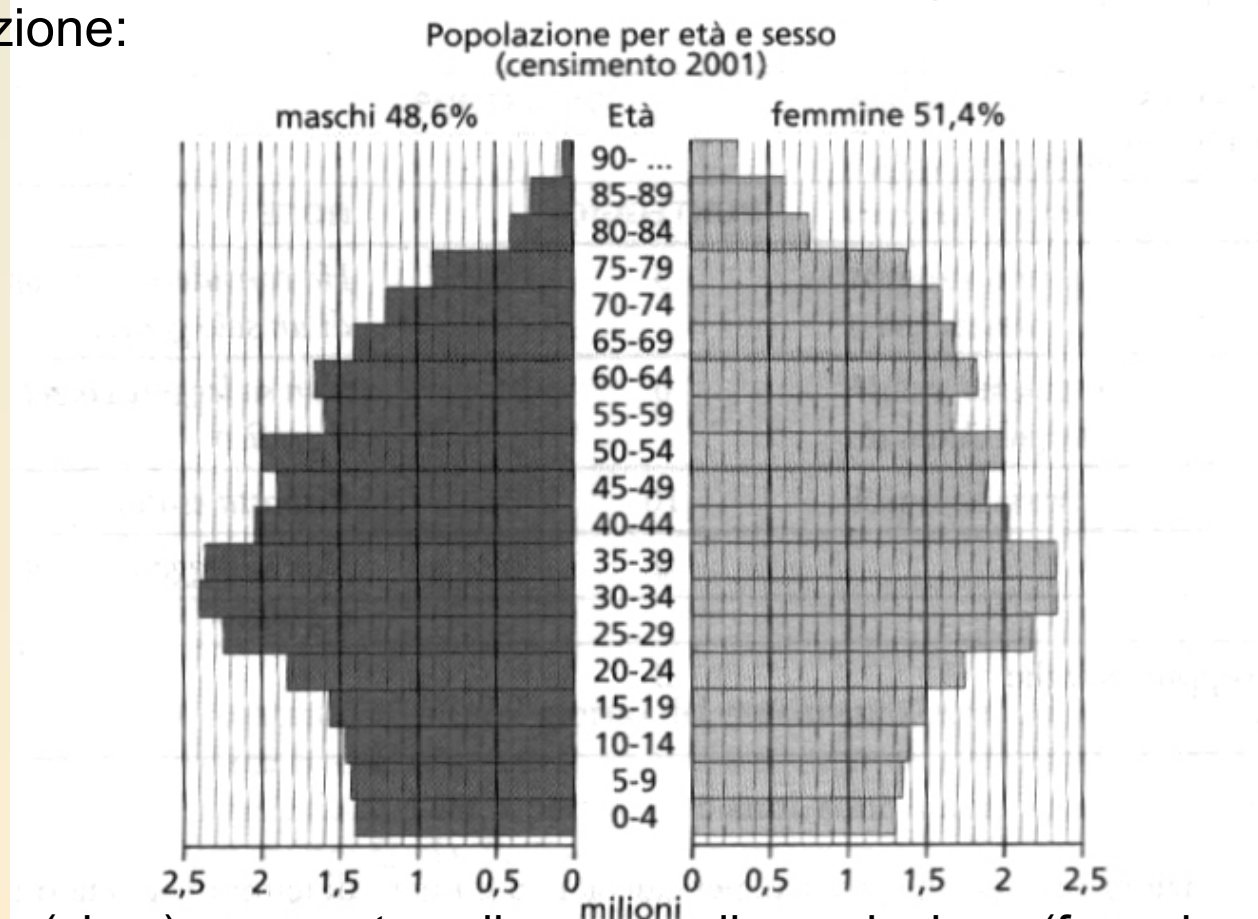
„Pedagogika Medialna”

Wydział Nauk Pedagogicznych

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Statistica: come (velocemente) leggere i dati?

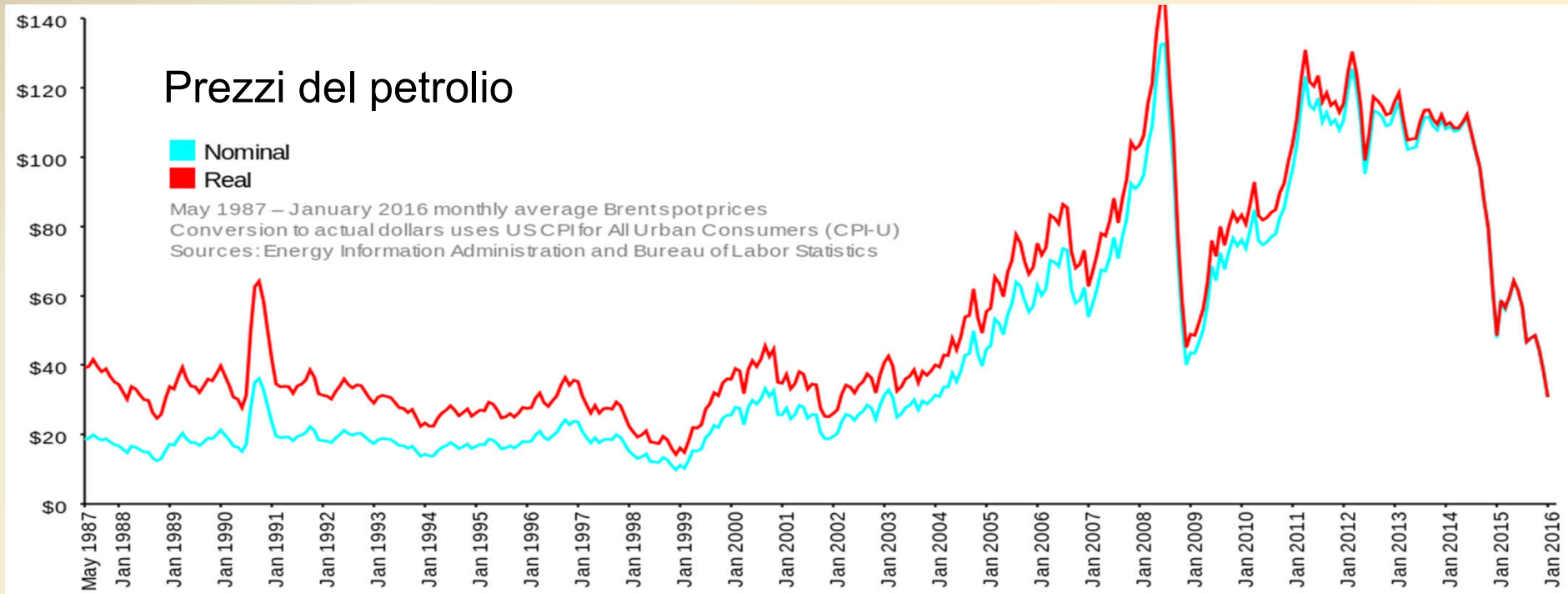
- „Il censimento in Italia nel 2001 ha dato una seguente distribuzione della popolazione:



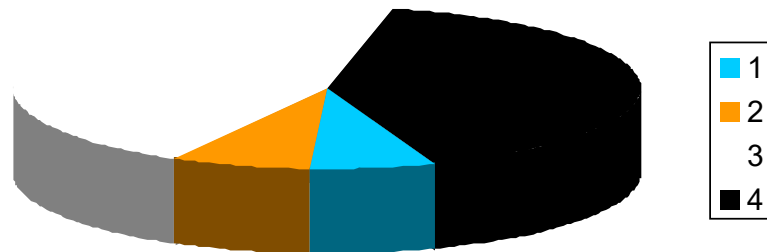
Barozzi op cit. str. 91

- A quanto (circa) ammontava il numero di popolazione (femmine e maschi insieme) nella fascia 15-19 anni: a) 1,5 mln, b) 2 mln, c) 3 mln, d) 4 mln?
- Quante (circa) sono le donne nell'età 35-49 anni?
- Se la popolazione totale ammontava a 56 305 568 persone, quanti erano i maschi? (assumere 56,3 mln)

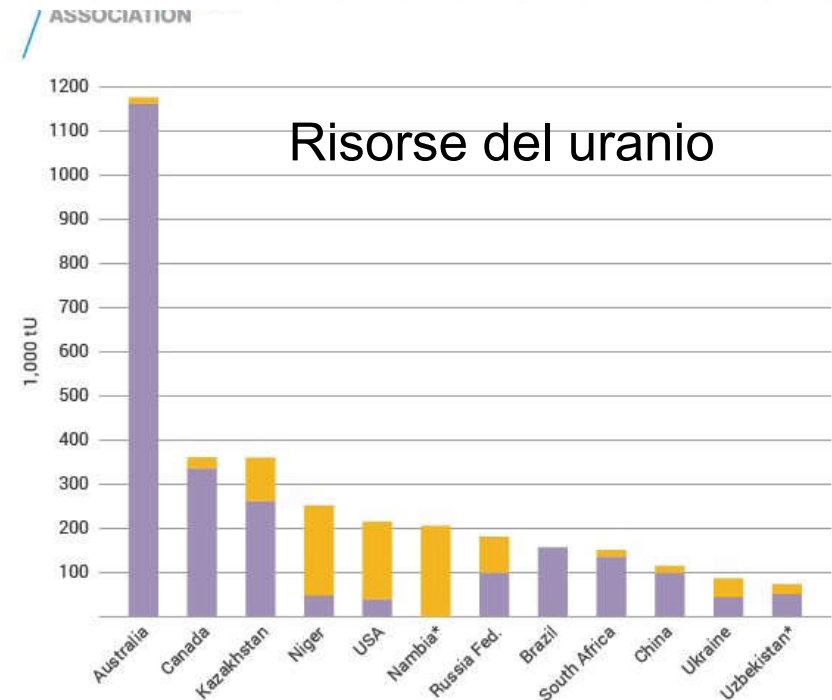
Statistica: come presentare i dati nel modo leggibile?



Risorse del petrolio, gas, carbone



GK, Climate, environment, energy



Statistica: come analizzare i dati?

- „Indagini statistiche hanno diverse fasi: la scelta del problema (della domanda), la selezione della popolazione esaminata, decisione sul modo d'indagine (telefono, „exit pool”), scelta del campione rappresentativo, raccolta di dati, l'elaborazione, la presentazione, commento”
- In ogni fase si prendono le decisioni che possono/ che influenzano il risultato
- Per es. le previsioni elettorali sono regolarmente errate (per es. l'elezione di Donald Trump in USA): i rispondenti non ammettono le preferenze che sono presentate nel modo negativo dalla stampa e TV

Esempio: in un gruppo di persone loro peso (massa) ammonta a 50, 54, 56, 60, 61, 70, 73, 80 kg. A quanto ammonta la massa media di queste persone? Risposta 63kg

→ **A che cosa serve questa media?** Per valutare la capienza dell'ascensore? OK!
- Per valutare l'obesità? **Male!** Donne o uomini?

„Il valore atteso”

„Ci propongono un gioco seguente: tiri il dado. Se esce un numero dispari paghi 10€. Se esce „2”, ricevi 1€; se esce „4” ricevi 12 €, se esce „6”, ricevi 14 €. Conviene giocare questo gioco?

→ Su questo dice il valore atteso, i.e. il guadagno o la perdita: il guadagno o la perdita moltiplicate per il loro probabilità.

Probabilità. „dispari” = $\frac{1}{2}$; probabilità „2”, o „4” o „6” = $\frac{1}{6}$

→ **Valore atteso:** $WV = \frac{1}{2} \cdot (-10) + (\frac{1}{6}) \cdot 1 + (\frac{1}{6}) \cdot 12 + (\frac{1}{6}) \cdot 14 = -0,5 \text{ zł}$

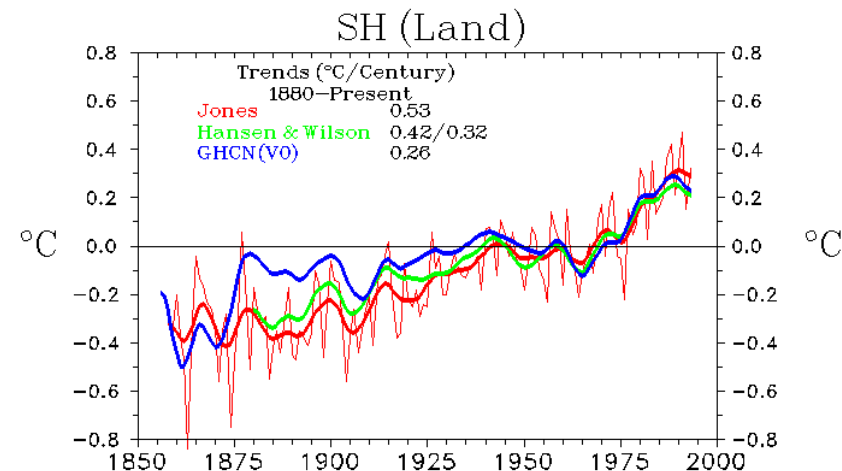
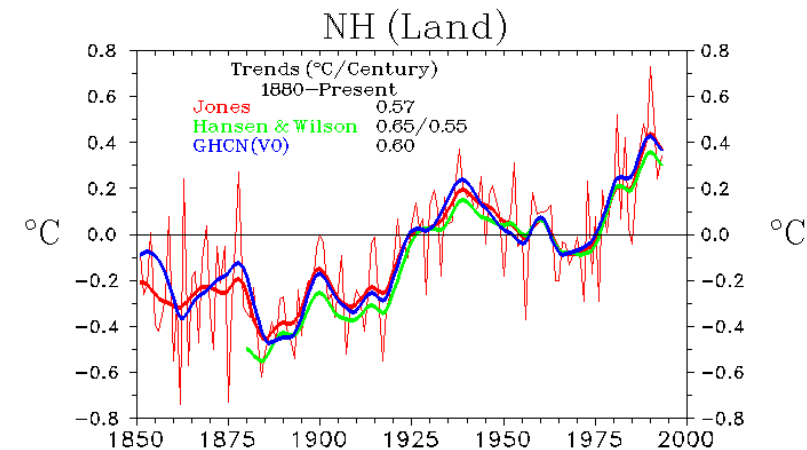
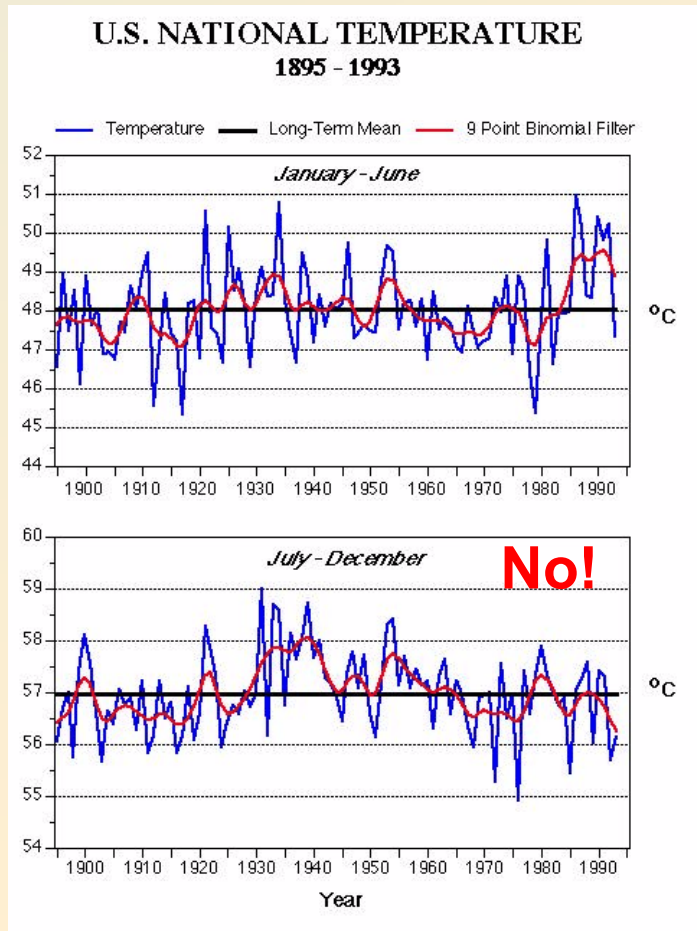
„Il gioco porta un lieve guadagno, ma al suo **organizzatore**”

Statistica: come analizzare i dati?

- „Dati statistici hanno diverse fasi: la scelta del problema (questione) la scelta della popolazione investigata, la scelta del metodo d'indagine (telefono, „exit pool”), la scelta del campione rappresentativo, l'elaborazione di dati, la presentazione” [1]

Esiste l'effetto serra?

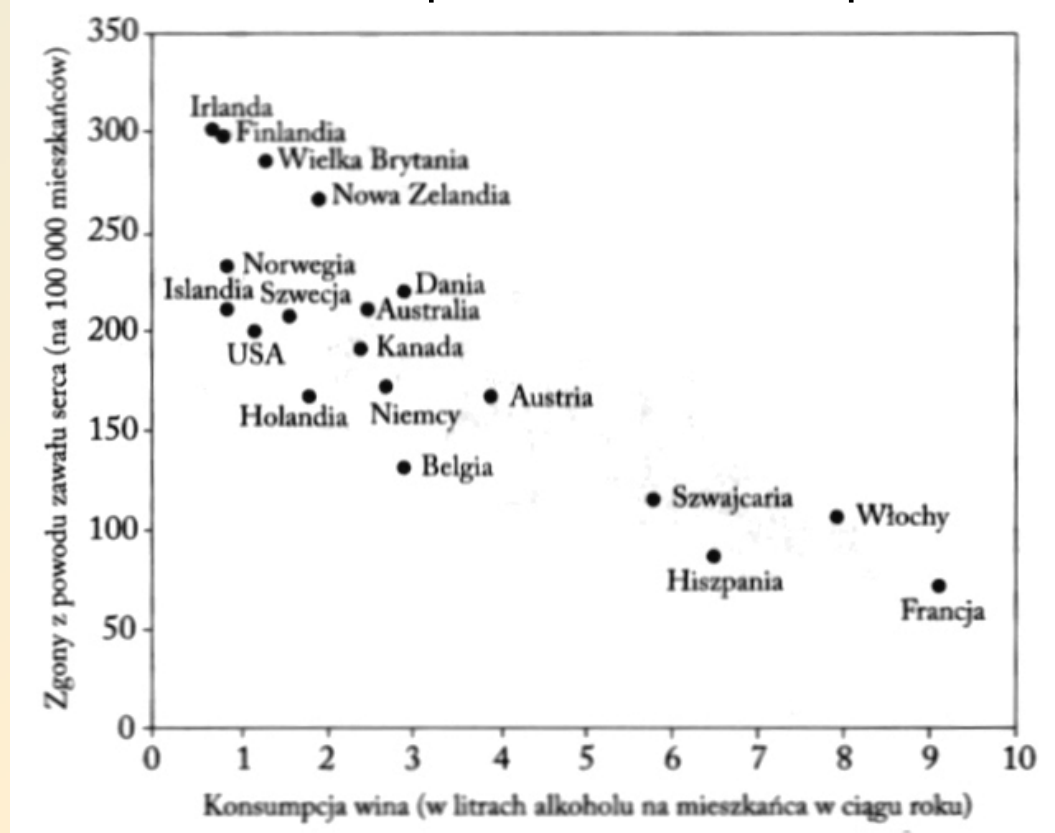
Che stagione è gennaio-giugno?



Si!!

Correlazione? Come non leggere i dati

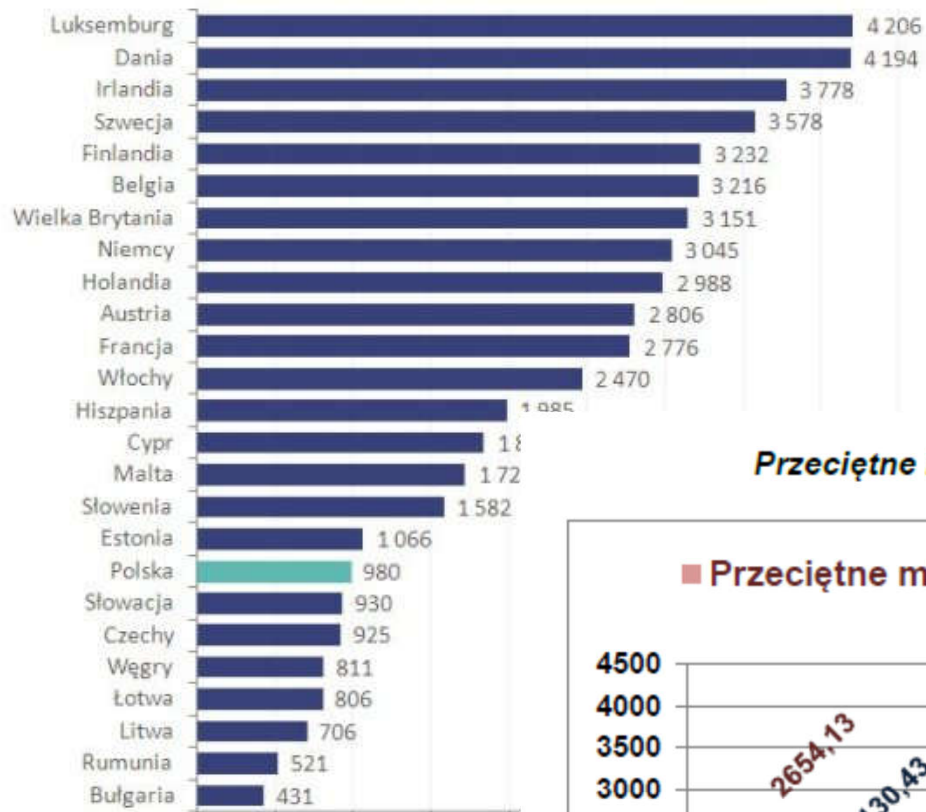
- „28 dicembre 1994 r. *New York Times* ha pubblicato uno studio sull'influenza del consumo di vino sulla longevità: la correlazione tra la probabilità di morte a causa del infarto e il consumo del vino. Ecco la presentazione di questi dati.”



- Da questi dati sembra che ber grandi quantità di vino protegge dall'infarto.
- „Ma i paesi dove si consuma più vino hanno un clima piacevole, buone abitudini alimentari, ritmi di vita – tuttociò può ridurre il rischio dell'infarto”
- Oppure – questi sono i paesi dove si beve meno whiskey e vodka...

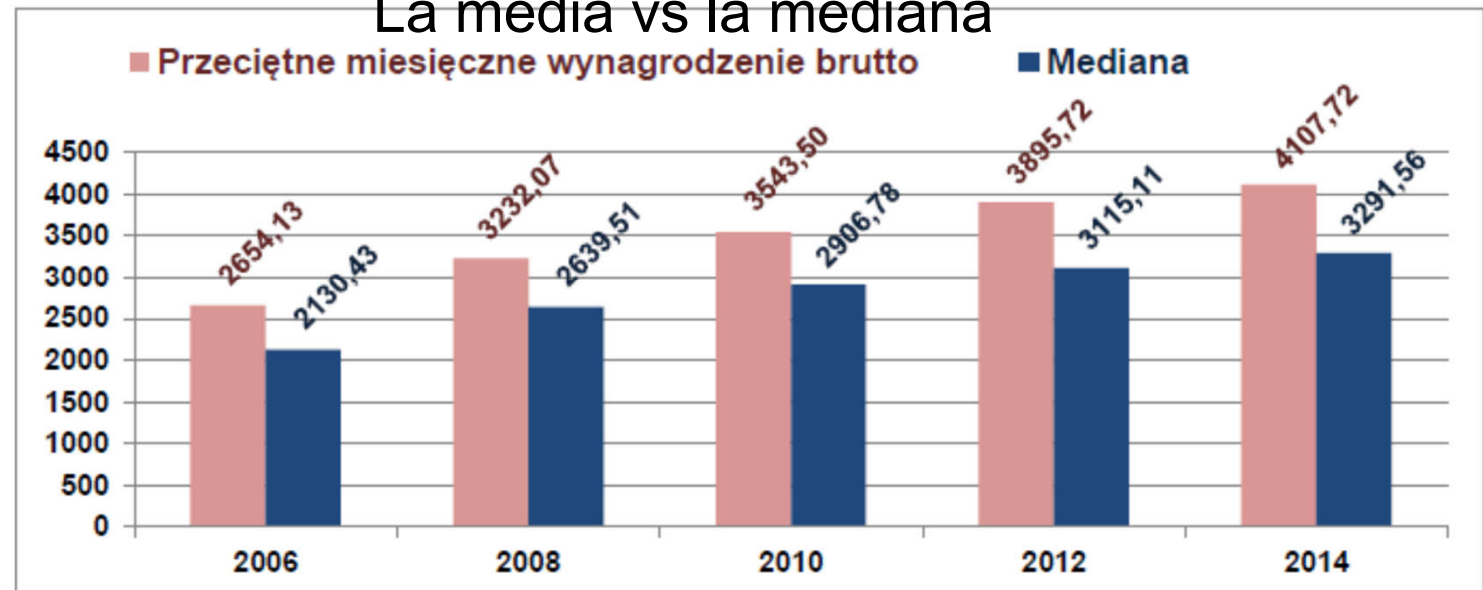
„Gli stipendi medi in Polonia crescono...”

Wykres 1. Przeciętne miesięczne wynagrodzenia nominalne brutto w krajach Unii Europejskiej* w 2014 roku (w EUR)**



Przeciętne i środkowe wynagrodzenia brutto (w złotych) za październik

La media vs la mediana



„Lo stipendio medio non esiste”

„Lo stipendio medio non esiste” (Gazeta Wyborcza)

Patrycja Maciejewicz 05 Agosto 2013 | 01:00

„Quando passeggiavo col mio cane in media statistica abbiamo tre gambe. Sì. Non mi scandalizzo. Ma con lo stipendio medio peggio.”

Quando descriviamo i dati del Istat in tema di stipendi, subito si alzano le voci critiche: sono dati falsificati, nessun di miei conoscenti ha lo stipendio così. Nascono le spiegazioni alternative: il capo guadagna 11 mila € e suoi nove dipendenti 1 mille €, cioè in media 2 mila a testa. [...]

La media nazionale non è accessibile per quasi tutti i lavoratori cge fanno le mansioni semplici: per 93% di commesse, $\frac{3}{4}$ di impiegati (in uffici) etc. [...]

http://wyborcza.pl/1,75968,14387464,Srednia_pensja_nie_istnieje.html?disableRedirects=true

Esiste la media?

La media aritmetica:

(il valore x numero di casi) / il totale numero di casi

p. es. il voto medi = $(44\% \times 1 + 38\% \times 2 + 18\% \times 3) / 100\% = 0,44 + 0,76 + 0,54 = 1,74$ (di fisica, per un libro tradizionale)

La media geometrica: per un rettangolo $a \times b$

è il lato del quadrato della stessa area $r = \sqrt{a \cdot b}$

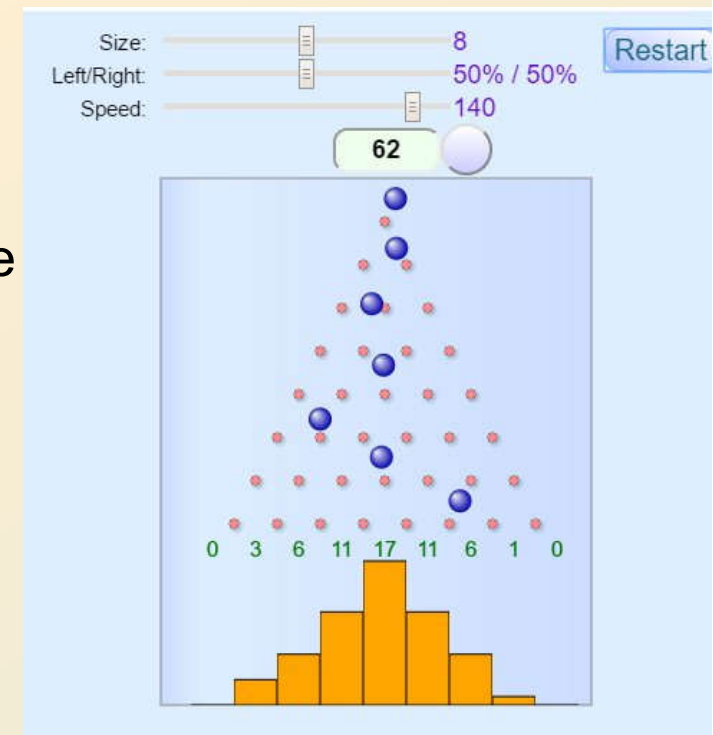
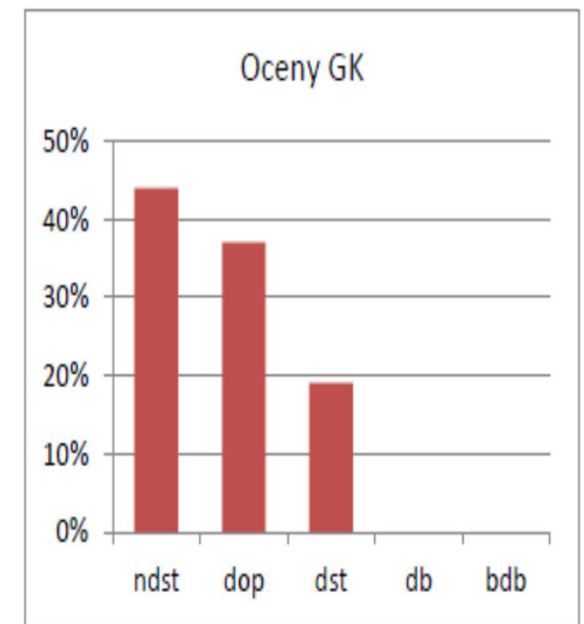
Ma il valore medio non riporta tutta l'informazione

La distribuzione di voti «desiderati» nella didattica

Tradizionale dovrebbe avere la forma, come la distribuzione delle palline nel gioco qua accanto.

La distribuzione così si chiama „**normale**”, o di Gauss.

Questa è la distribuzione, per es. del peso di chicchi di riso della stessa specie o l'altezza di uomini adulti in Olanda.

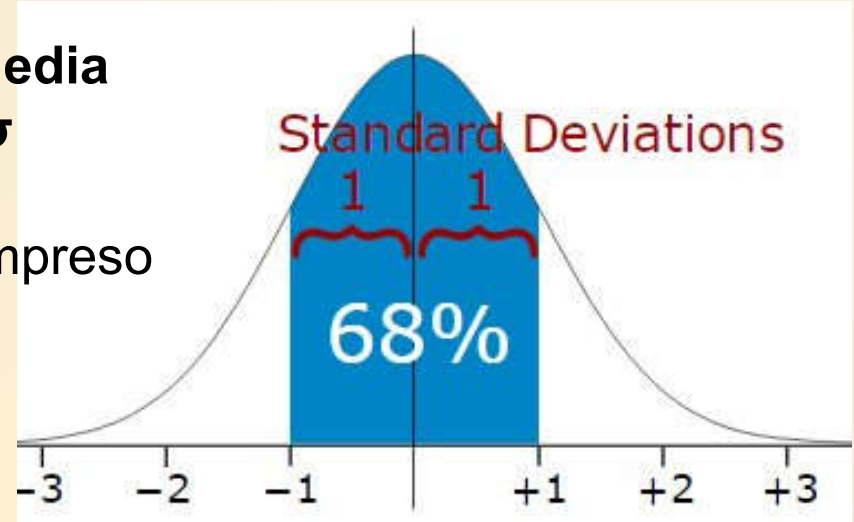


La distribuzione normale (di Gauss)

1. La distribuzione normale è descritta dalla **media** ma anche dallo **scarto (deviazione) standard σ**

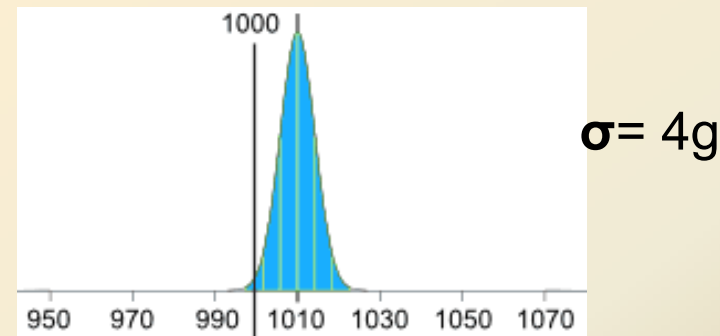
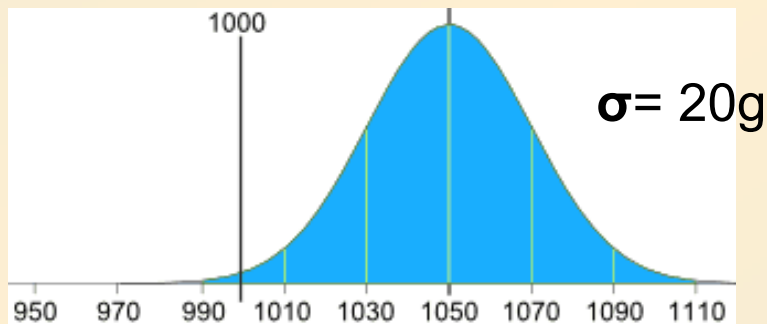
Nella distribuzione „normale” 68% di valori è compreso tra il valore $(x_0 - \sigma)$ e $(x_0 + \sigma)$

e tra $\pm 2 \sigma$ persino 95%)



$$f(X) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2 / 2 \sigma^2}$$

Consideriamo due macchine per impacchettare lo zucchero in sacchetti da 1 kg:



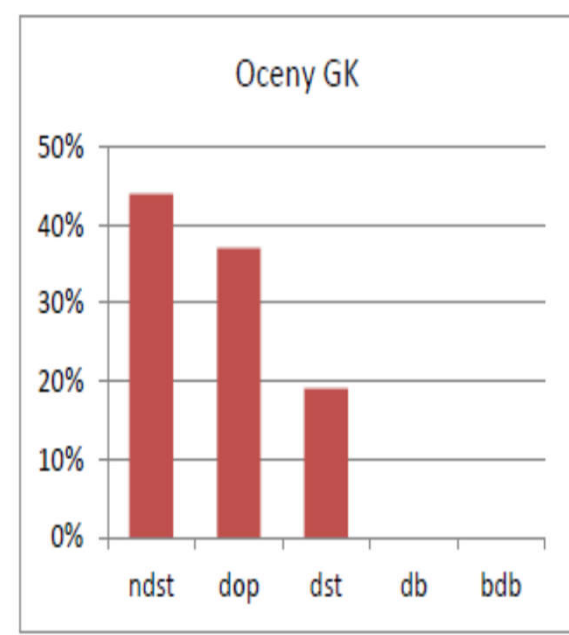
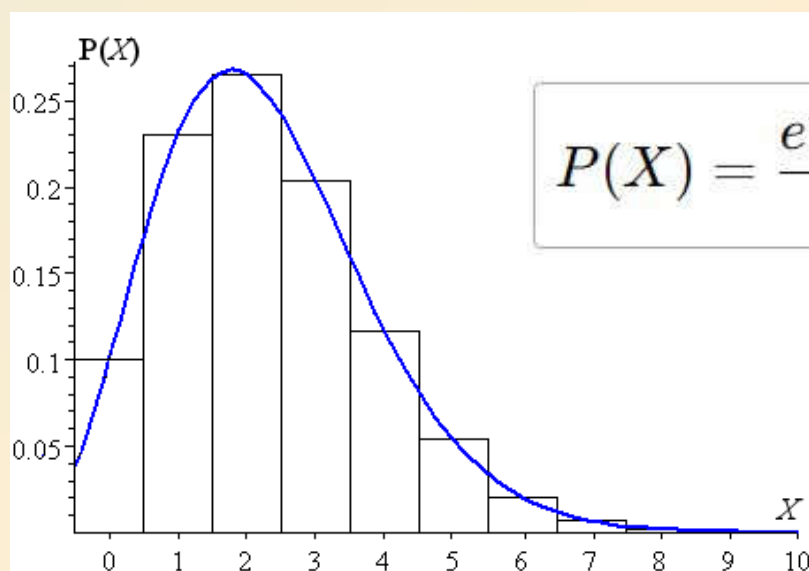
Fu corretti i parametri operativi della macchina – Sono migliorati i risultati economici (i clienti si lamentavano se il peso era inferiore a 1 kg)

La distribuzione di eventi rari (Poisson)

Ladislaus (Władysław) von Bortkiewicz: il numero di decessi nella cavalleria prussiana a causa del calcio del cavallo: dopo 20 anni d'indagini si è rivelato che il numero di decessi ammonta a 0,61 per reggimento, allora non è significativo.

Quanti, in media, possono capitare i capelli nel hamburger di McDonald? Le volte uno, ma raramente, ma due – praticamente mai.

= si chiama la distribuzione di eventi **rari** (di Poisson)



In questo caso è difficile parlare della media –
Piuttosto bisognerebbe parlare di eventi più probabili

La media, la mediana, la dominante

- **Przeciętne miesięczne wynagrodzenie** ogółem brutto w gospodarce narodowej (dla jednostek o liczbie pracujących powyżej 9 osób) w październiku 2014 roku wyniosło 4107,72 zł. **Media**
- **Przeciętne godzinowe wynagrodzenie** ogółem brutto wyniosło **22,91 zł.**
- **Najczęstsze miesięczne wynagrodzenie** ogółem brutto otrzymywane przez pracowników wynosiło 2469,47 zł (dominanta, wartość modalna). **Dominante**
- **Połowa pracowników** zatrudnionych otrzymała wynagrodzenie ogółem brutto do 3291,56 zł (**mediana** = decyl piąty = wynagrodzenie środkowe). **Mediana**
- **10% najniżej zarabiających** pracowników otrzymało wynagrodzenie ogółem brutto co najwyżej w wysokości **1718,00 zł (decyl pierwszy).**
- **10% najwyżej zarabiających** pracowników otrzymało wynagrodzenie ogółem brutto co najmniej w wysokości **6917,23 zł (decyl dziewiąty).**

<http://stat.gov.pl/obszary-tematyczne/rynek-pracy/>

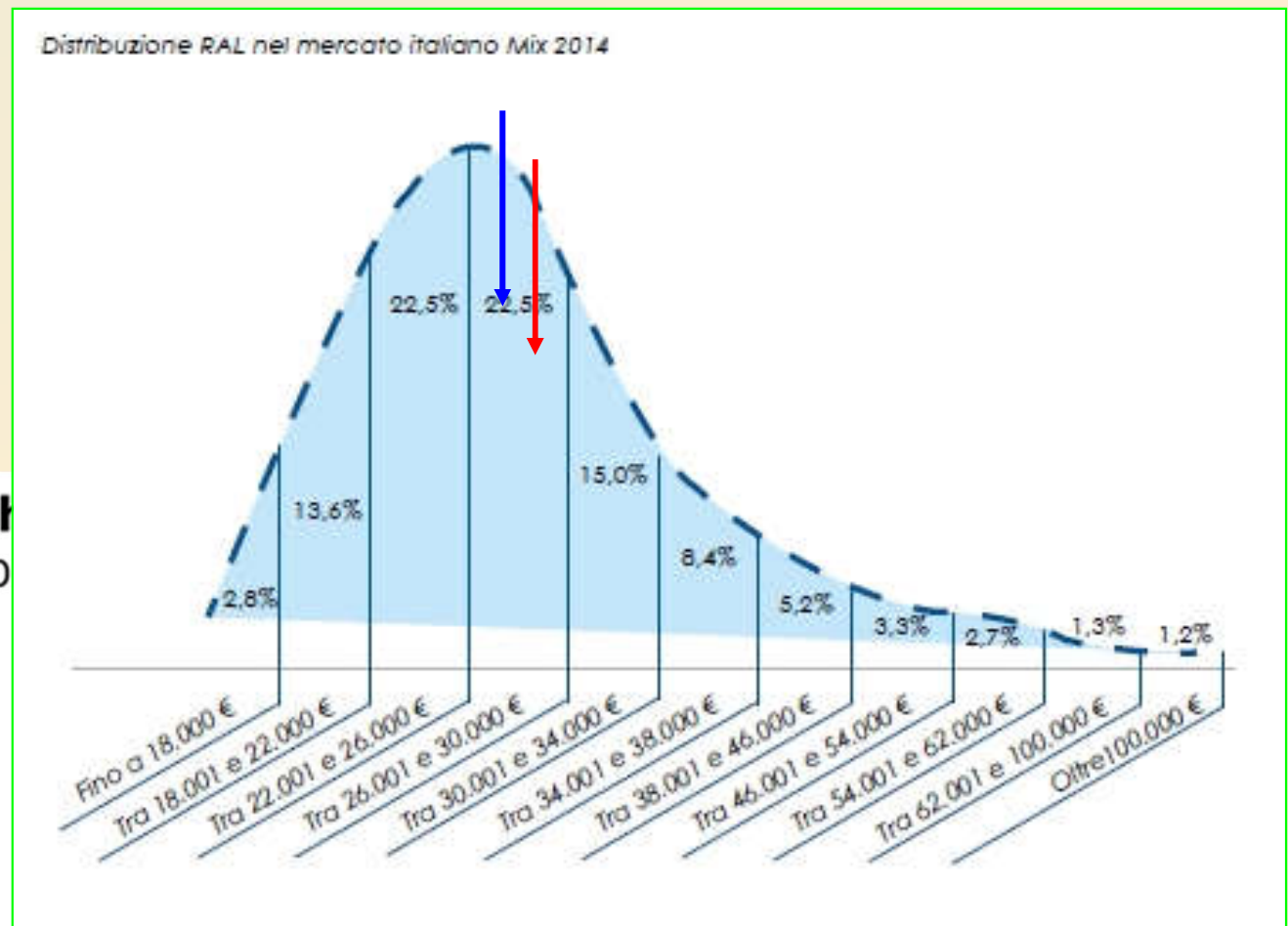
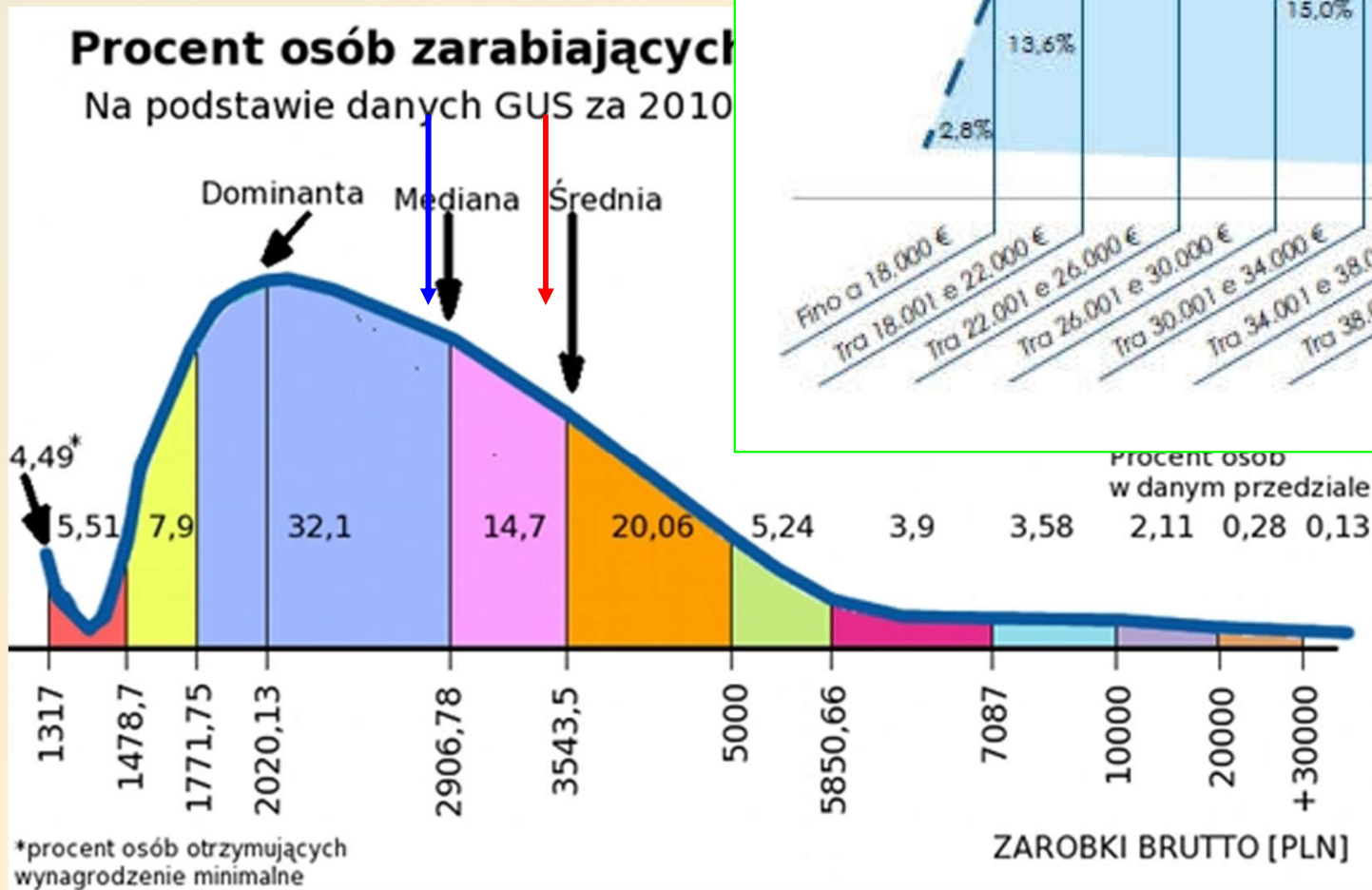
[pracujacy-zatrudnieni-wynagrodzenia-koszty-pracy/struktura-wynagrodzen-wedlug-zawodow-w-pazdzierniku-2014-r-,5,4.html](http://stat.gov.pl/obszary-tematyczne/rynek-pracy/pracujacy-zatrudnieni-wynagrodzenia-koszty-pracy/struktura-wynagrodzen-wedlug-zawodow-w-pazdzierniku-2014-r-,5,4.html)

Si è verificato che nel 2014 roku la mediana dello stipendio nazionale ammontava in Polonia a 2359 PZL netto al mese. Questo vuol dire che 50% di lavoratori guadagnava meno che questa quota, che oggi equivale a solo 550 euro. Poi, lo stipendio pagato più frequentemente (il valore dominante, cioè la moda) era nel 2014 la quota di solo 1786 PZL netto (415 euro). Come se non bastasse, 1,36 mln di lavoratori riceveva lo stipendio non più alto del minimo, cioè 1237 PZL netto al mese (c.a. 290 E)!

<http://niewygodne.info.pl/artukul6/02692-GUS-ujawnia-dramatyczne-dane-nt-wynagrodzen.htm>

La media, la mediana, la dominante

Stipendi in Polonia
(2014) e in Italia

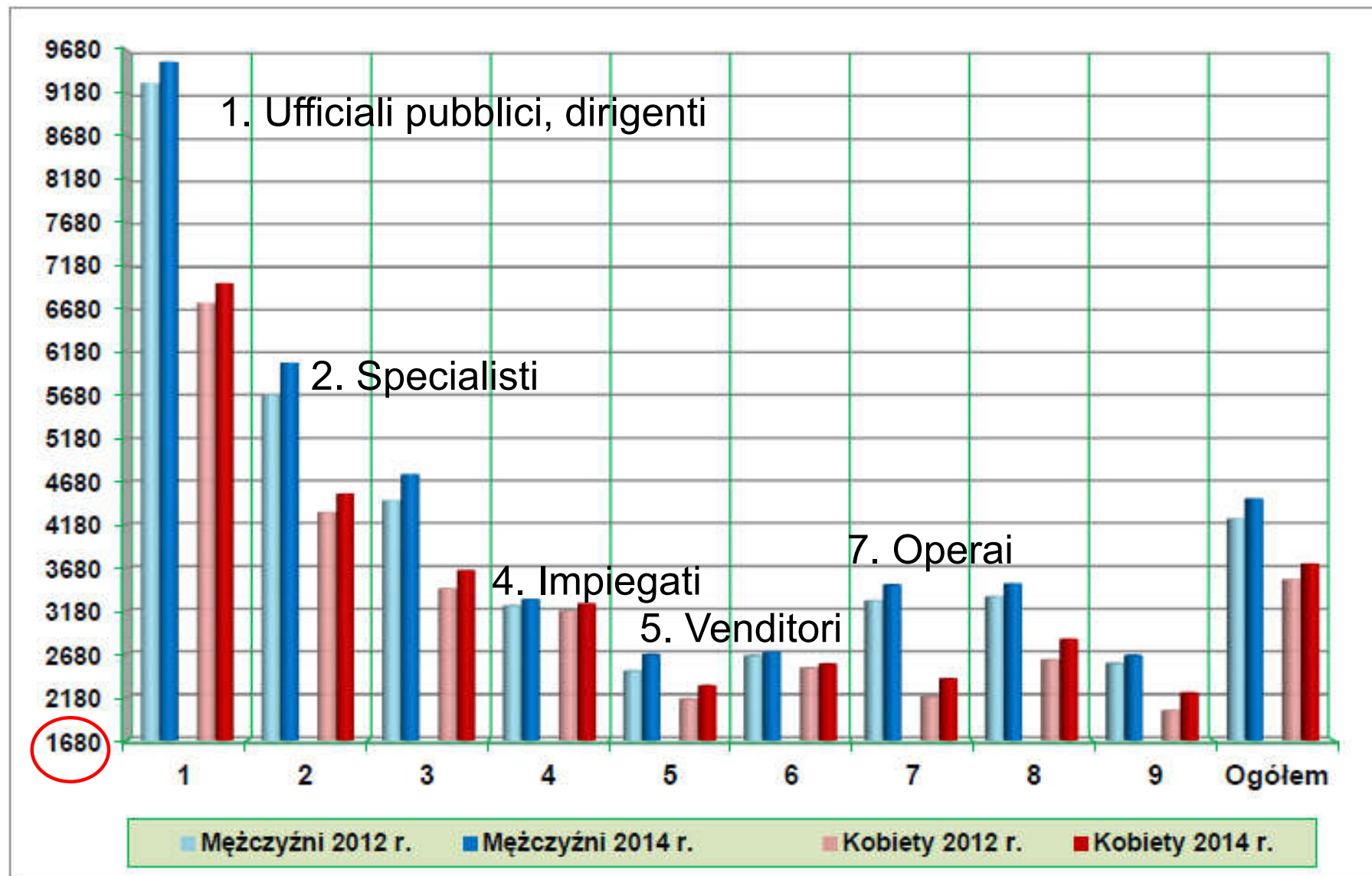


[age36.png](#)

icing_operai_dirigenti-107441843/

La media de-composta

Zróźnicowanie przeciętnych wynagrodzeń brutto (w złotych) według „wielkich” grup zawodów w październiku 2012 i 2014 r.



Due libri di testo (polacchi): biologia con la statistica?

F₂:



czerwone



białe

Ryc. 4.2. Krzyżówka grochu między roślinami różniącymi się jedną cechą – barwą kwiatów

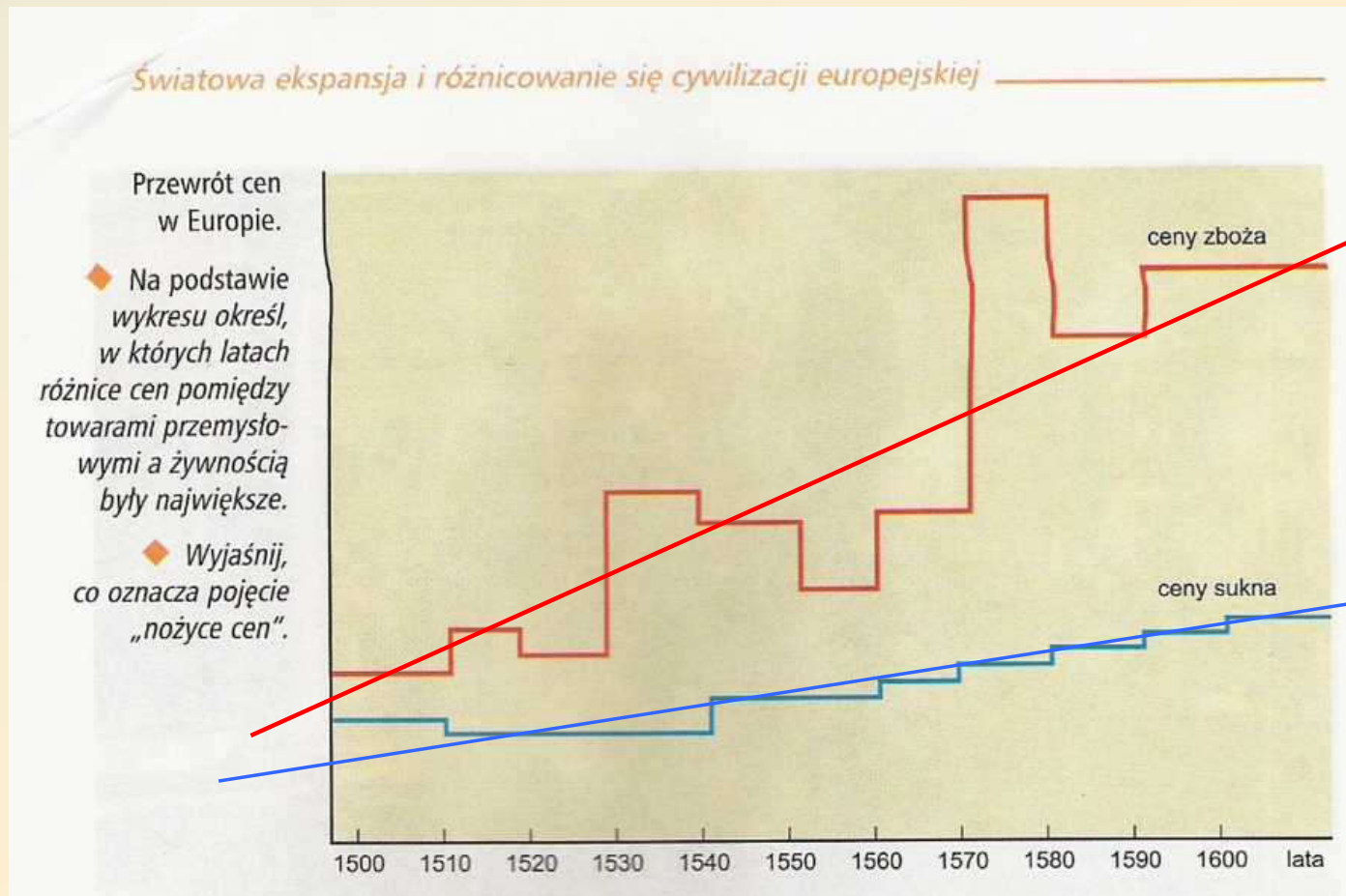
rośliny o białych kwiatach w pokoleniu F₂ (ryc. 4.2), tym bardziej że analiza krzyżówek roślin z linii czystych różniących się inną cechą, na przykład wysokością pędu, dawała porównywalne efekty.

Uzyskane wyniki krzyżówek Mendel poddał więc prostej analizie arytmetycznej – policzył wszystkie osobniki z F₂. W wypadku cechy barwy kwiatów na 929 roślin 705 miało kwiaty czerwone (75,88%), a 224 kwiaty białe (24,12%). W wyniku krzyżówki roślin różniących się wysokością pędu powstały w F₂ 1064 rośliny, z czego 787 miało pędy wysokie (73,97%), a 277 niskie (26,03%). W wypadku krzyżówki roślin różniących się cechą barwy

ko skutek mieszania się dwóch różnych płynów pochodzących od obojga rodziców. Potomstwo miałoby więc być mieszaniną płynnej substancji dziedzicznej rodziców, ale wówczas nie mogłoby w pokoleniu F₂ odtwarzać fenotypów form wyjściowych. Nasuwa się zatem pytanie, skąd się wzięły

O forse sul campione di <1000 esemplari non si possono dare 4 cifre significative? O ancora l'incapacità di arrotondare (e usare la calcolatrice?)

Storia (con l'economia) ?



Prezzi del grano

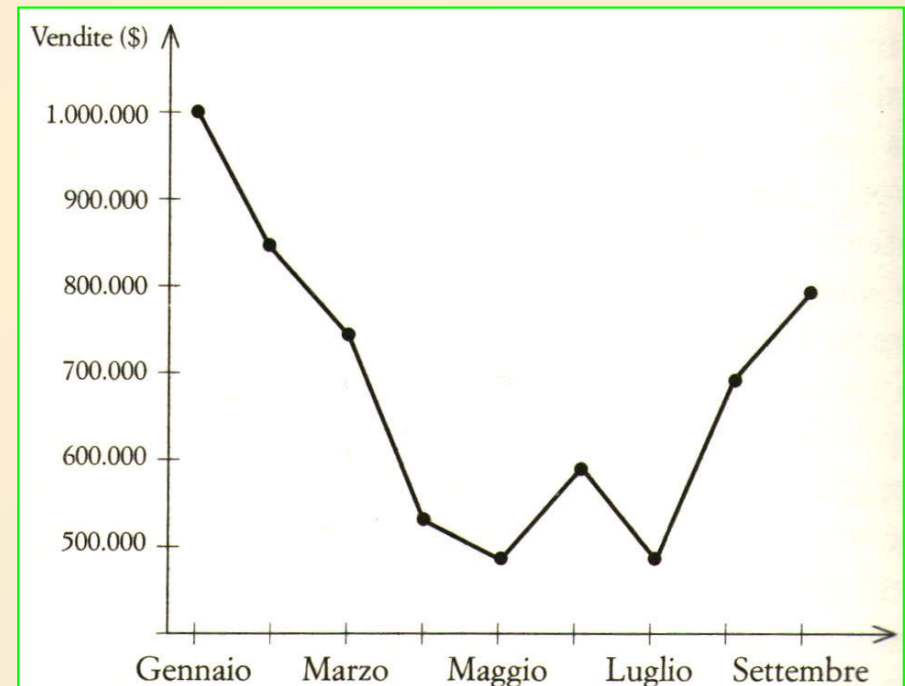
Prezzi del tessuto

I forbici di prezzi? Oppure la mancanza della capacità di leggere la regressione lineare? E dell'economia? La scoperta dell'America ha provocato l'afflusso d'oro a basso costo, perciò all'unità del prodotto venivano assegnati più denari.

„Quando numeri mentono? Vivere con l'incertezza”

- La matematica diventa particolarmente importante quando riguarda la medicina. Dire in base del campione del DNA che la probabilità che qualcun'altro fu l'assassino ammonta a 1:100 000, significa praticamente la condanna. Dire, in base dello stesso campione che „a Varsavia ci potrebbero essere altre 10 con lo stesso profilo DNA”, diventa un atto di clemenza.

Come si può dire alla riunione che le vendite sono cadute drasticamente tra il gennaio e maggio, come si vede chiaramente dal grafico?



Conviene non far vedere il grafico e dire che „sì, è vero che le vendite si sono ridotte inizialmente del 50%, ma però in ultimi mesi son cresciuti del 67%”. Nessuno si accorge che questo modo di calcolare le percentuali significa praticamente la caduta *netto*.

«Matematica dappertutto»

Foglio di calcolo elettronico:

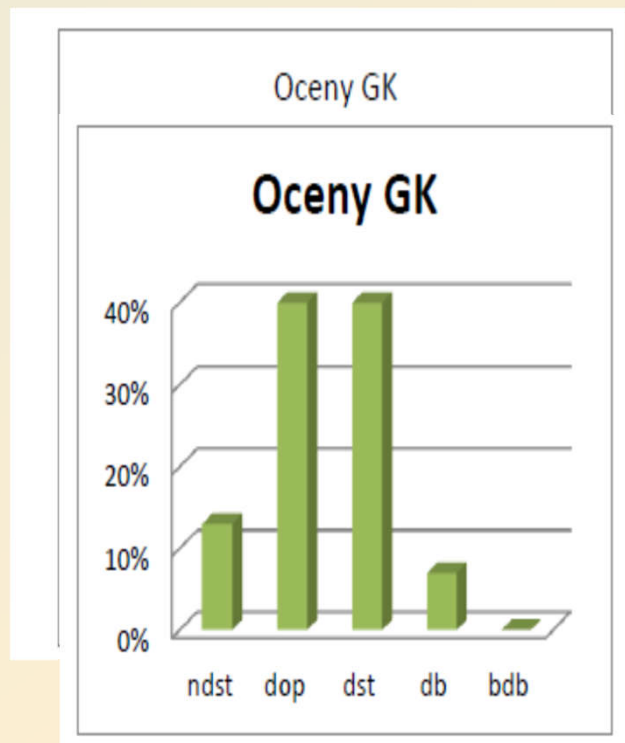
$$10^{25} + 100 - 10^{25} = 0$$

$$10^{25} - 10^{25} - 100 = 100$$

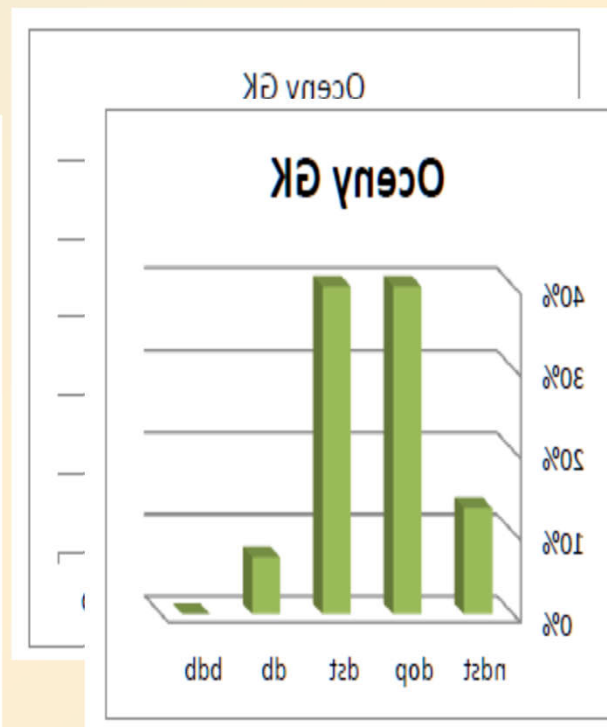
Domingo Paola, Michele Impedovo, Ercole Castagnola,
«Matematica dappertutto», Zanichelli

Statistica: quali dati vogliamo?

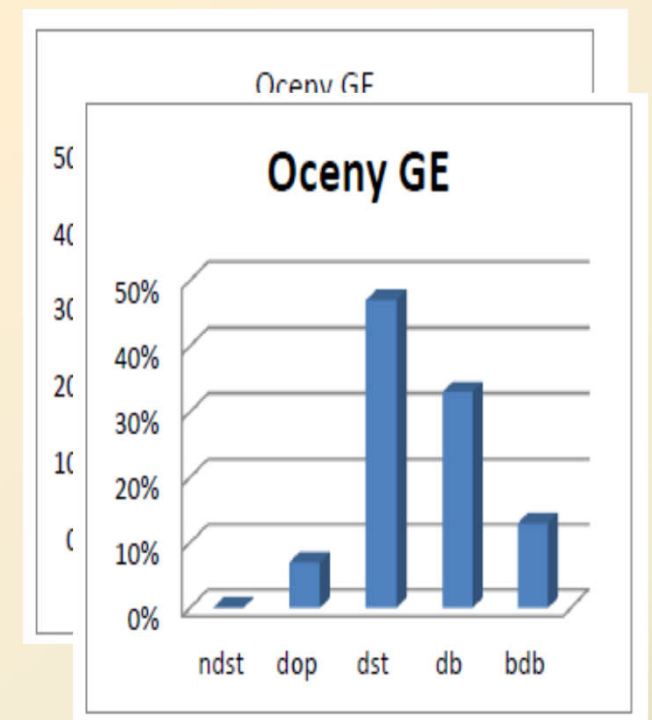
- Didattica USA/ EU: „no student left behind”
- „Toruński tex-book di fisica”: narrazione piuttosto che nozioni



Gruppo tradizionale



Gruppo desiderato?



Few students left behind

Edgar Morin: Matematica e filosofia

- „L'insegnamento matematico, che evidentemente comprende il calcolo, andrà oltre il calcolo. Dovrà mostrare la natura intrinsecamente problematica della matematica, come la scienza che formula i problemi. Il calcolo è uno strumento del ragionamento matematico, il quale si esercita sul *problem setting* e sul *problem solving*, e del quale si tratta di mostrare la «consumata prudenza e la logica implacabile».
- Durante tutti gli anni di insegnamento si dovrebbe progressivamente mettere in evidenza il dialogo del pensiero matematico con lo sviluppo delle conoscenze scientifiche, e infine i limiti della formalizzazione e quantificazione.
- La filosofia dovrebbe eminentemente contribuire allo sviluppo dello spirito problematizzatore. La filosofia è prima di tutto la forza di interrogazione e di riflessione, che verte sui grandi problemi della conoscenza e della condizione umana.
- La Filosofia, oggi confinata in una disciplina pressoché ripiegata su se stessa, deve riappropriarsi della missione che fu sua da Aristotele fino a Bergson e Husserl, senza tuttavia abbandonare le domande che le sono proprie.
- Così, pure svolgendo il proprio insegnamento, il professore di filosofia dovrebbe estendere il suo potere riflessivo e interrogativo alle conoscenze scientifiche come alla letteratura e alla poesia, e nello stesso tempo nutrirsi di scienza e diletteratura.”

Edgar Morin, *Tête bien faite*, Seuil, 1999, p. 17, trad. GK

Conclusioni – la matematica, come una scienza sociale

- I Greci non usavano il calendario (da qui il detto latino *ad calendam graecam*, cioè „mai”).
- Da Romani il calendario, sino ai tempi di Giulio Cesare fu la sapienza segreta, riservata per pochi, come i giudici.
- Come scrive prof. Angelo Guerraggio nella introduzione alla „Matematica per cittadini”, la conoscenza di matematica non può essere riservata solo per futuri insegnanti o scienziati.
- La capacità della valutazione veloce e corretta di dati numerici è un elemento importante del successo nella vita.
- La conoscenza della matematica diventa anche un elemento del potere politico: „come cambiare la struttura di redditi per ottenere maggior accettazione politica?” – spostare la distribuzione di Poisson a Gauss. In altre parole, aumentare i redditi delle persone che guadagnano al di sotto della *mediana*.
- La matematica diventa allora un elemento di dialogo sociale e non di „ciarlataneria”.
- **La matematica è una regina delle scienze, permettiamo a lei di co-governare.**

Conclusioni – la matematica, come la scienza didattica

- „Se anche abbiamo preso gli esempi dalla matematica, certe conclusioni si possono generalizzare per altre materie.
- Per primo, la determinazione di una struttura base di matematica richiedeva dei secoli di sforzi di tante menti eccezionali.
- [...] che il sistema decimale non ci fu mandato da qualche dio di matematica. Solo lo studente che ha imparato ad adoperare altri sistemi è in grado di valutare, che benedizione è il sistema decimale.
- E finalmente, la teoria d'apprendimento cerca di tener conto che il programma d'insegnamento riflette non solo il carattere della conoscenza in se stessa, ma anche il carattere di chi questa conoscenza possiede, e anche il percorso per arrivare a questa conoscenza [...]
- Informare lo studente sui risultati delle particolari scienze non dovrebbe consistere nel martellare i risultati di codesta materia nella testa dello studente.
- Lo scopo dell'insegnamento non è la produzione delle piccole enciclopedie ambulanti, ma ottenere lo stato che lo studente cominci a pensare indipendentemente in modo matematico.
- La conoscenza è un processo, e non un risultato «prêt-a-porter»

Bibliografia

- Zdzisław Nowak, *Po rozum do głowy (wesół logika). Zagadki, algebry, anegdoty, łamigłówki*. Wydawnictwo Harcerskie, Warszawa, 1970
- Barozzi, Bergamini, Boni, Cerani, Pagani, *La matematica per il cittadino*, Zanichelli, Bologna, 2008
- Ian Steward, *Histerie matematiche. Giochi e divertimenti con la matematica*, Oxford University Press, 2004
- Ian Steward, *17 equazioni che hanno cambiato il mondo*, Prószyński i Ska, Varsavia 2013
- Tony Crilly, *50 mathematical ideas you really need to know*, Quercus Publishing, London, 2007, ed. it. 2009 Dedalo
- Gerd Gigerenzer, *Calculated Risks*, 2002, ed. wł. Raffaello Cortina, 2003
- Giuliano Spirito, *Matematica senza numeri*, Il Sapere „100 pagine 1000 lire. Tascabili Economici Newton, Roma, 1995
- J. Bruner, *Nella ricerca della teoria dell'insegnamento*, Harvard 1966
- Pere Grima, *La certezza assoluta e altre funzioni. I segreti della statistica*. RBA Barcelona, 2010, **Serie: Il mondo è matematico e altri 39 libri di questa serie...**