Kinematyka

4.1. Wahadło matematyczne

Rozważmy wahadło matematyczne w postaci masy m zawieszonej na nieważkiej nici o długości $L = 1$ m. Wahadło wykonuje oscylacje z amplitudą $\theta_o = 45°$. Pomijając opory, znajdź wyrażenie na okres drgań wahadła i porównaj z okresem otrzymanym dla małych wychyleń wahadła. Przez θ oznaczamy kąt wychylenia wahadła.

Wskazówka

Korzystamy z zasady zachowania energii.

$$\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgL(1-\cos\theta) = mgL(1-\cos\theta_o),$$

którą możemy zapisać w postaci

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_o). \qquad (1)$$

Pamiętając, że

$$\cos\theta - \cos\theta_o = 2\left(\sin^2\frac{\theta_o}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

równanie (1) przyjmuje postać

$$\left[\frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{dt}\right]^2 = \frac{g}{L}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Rozdzielając zmienne, otrzymujemy

$$\frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{sin^2\frac{\theta_O}{2} - sin^2\frac{\theta}{2}}} = \omega dt, \qquad (2)$$

gdzie $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Przyjmujemy teraz zmienną pomocniczą u, $\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin u$.

Dla zmiennej tej zachodzi związek

$$\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}} = \sin\frac{\theta_o}{2}\sqrt{1-\sin^2 u} = \sin\frac{\theta_o}{2}\cos u .$$

Między zmiennymi θ i u zachodzi też zależność

$$\cos\frac{\theta}{2}d\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos u du .$$

Lewą stronę równania (2) możemy zapisać jako

$$\frac{d(\frac{\theta}{2})}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{1}{\sin\frac{\theta_o}{2}\cos u}\frac{\sin\frac{\theta_o}{2}\cos u du}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_o}{2}\sin^2 u}}.$$

Mamy więc

$$\omega t=\int_0^u\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2 u}}.$$

Okres T otrzymujemy, przyjmując, że dla $t = T/4$, $\theta = \theta_0$, czyli $u = \pi/2$:

$$T=4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2 u}}. \tag{3}$$

Całkę pod pierwiastkiem nazywamy całką eliptyczną zupełną pierwszego rodzaju.

Zauważmy, że wynik (3) zawiera dobrze znaną zależność

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{3'}$$

prawdziwą dla małych wychyleń. W tym przypadku $\theta_0 \to 0$ i wartość całki we wzorze (3) dąży do $\pi/2$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-sin^2\frac{\theta_o}{2}sin^2u}}=1+\frac{1}{2}sin^2\frac{\theta_o}{2}sin^2u+\frac{3}{8}sin^4\frac{\theta_o}{2}sin^4u.$$

Ogólnie, możemy uzyskać zależność dla *T*, rozwijając w szereg wyrażenie pod pierwiastkiem, całkując wyraz po wyrazie, co po podstawieniu do całki we wzorze (3) daje

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1+\frac{1}{4}sin^2\frac{\theta_o}{2}+\frac{9}{64}sin^4\frac{\theta_o}{2}+\cdots\right]. \tag{4}$$

Przypominamy, że: $I_n=\int_\alpha^\beta sin^n u du=[\frac{n-1}{n}I_{n-2}-\frac{1}{n}usin^{n-1}u]_\alpha^\beta$.

Obliczenia liczbowe

Podstawiając dane wartości liczbowe, różnica między wynikiem (4), a tym określonym dla małych drgań (3) dana jest przez: $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}sin^2\frac{\theta_o}{2}\left[1+\frac{9}{16}sin^2\frac{\theta_o}{2}\right]=0{,}079$ s.

Błąd wynikający z przyjęcia wzoru przybliżonego (3'), który daje T = 2,006 s, wynosi zaledwie 0,39%.

Komentarz: Zadanie to można rozwiązać również, korzystając z wyrażenia na hamiltonian.

wg G. Consolati, *Fisica generale*, EtasLibri, Milano, 1994.