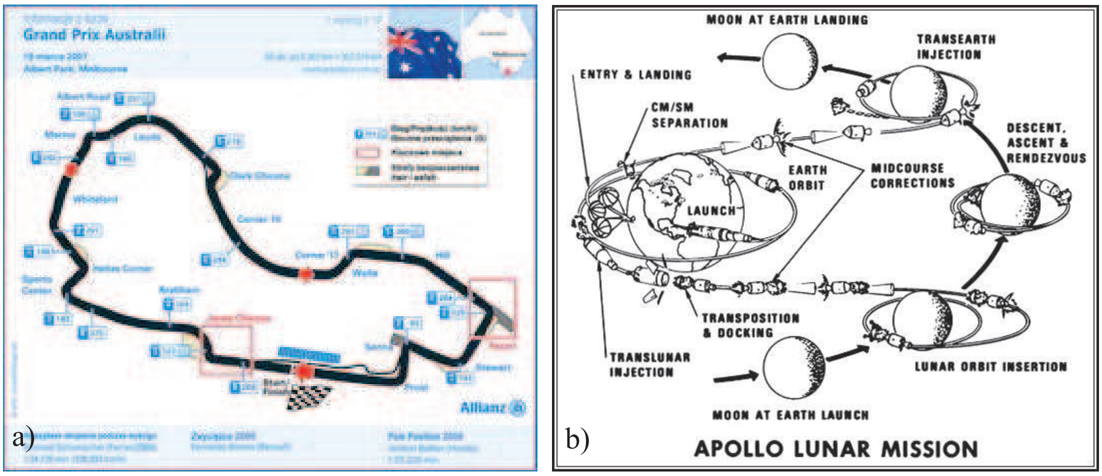
ROZDZIAŁ III. Kinematyka, czyli nauka o cechach ruchu

3.1. Ruch i jego opis

Nasze codzienne doświadczenie sugeruje, że aby ciała się poruszały, to musi je coś „wprawiać w ruch”. Ludzkości zajęło parę tysiącleci, aby poznać *prawa ruchu*. Pierwszym, który stwierdził, że ciała raz wprawione w ruch poruszają się *bez* żadnych dodatkowych zewnętrznych przyczyn, był zakonnik, Jean Buridian (1295–1358), profesor uniwersytetu w Paryżu. Pisał on, że własnością ruchu jest *impetus*, który ciało poruszające się uzyskuje od ciała wprawiającego je w ruch. Dzięki temu odkryciu Mikołaj Kopernik nie musiał już wyjaśniać „obrotów sfer niebieskich” za pomocą jakiś tajemnych przekładni itp. Ciała niebieskie, raz wprawione w ruch, poruszają się (prawie) wiecznie. Dziś *impetus* nazywamy „pędem”. Ale po kolei…

1. Trajektoria ruchu

Zanim powiemy, *jak* porusza się jakieś ciało, najpierw musimy określić, *gdzie* ono się porusza. Rakieta leci z Ziemi na Marsa po **trajektorii** lotu, a samochód Formuły 1 jeździ po *torze*. Otóż **tor** jest to krzywa (lub prosta), jaką poruszające się ciało kreśli w przestrzeni. Pojęcia toru i trajektorii są zresztą zamienne: o torze mówimy na przykład w przypadku wyścigów saneczkarzy, a w przypadku lotu pocisku, rakiety lub piłki do bramki mówimy raczej o trajektorii.



Rys. 3.1. Tory wyścigów Formuły 1 mają różne kształty. Samochody jadące po tych torach kreślą *trajektorie* ruchu. Planowanie trajektorii lotu na Księżyc (na rysunku plan lotu Apollo 12, NASA) jest skomplikowane – musi uwzględniać ruch nie tylko rakiety, ale i ruch Księżyca dookoła Ziemi.

Są rozmaite sposoby opisywania trajektorii – można ją wykreślić, sfotografować, opisać słownie. Wyjeżdżając na wycieczkę samochodem, można wydrukować mapy, skorzystać z nawigacji satelitarnej, która mówi po kolei, gdzie należy skręcić, albo zapytać o drogę przechodnia.

Zadanie 3.1.

Opisz słownie, a następnie zrób rysunek ilustrujący twoją drogę z domu do szkoły. Zrób to na różne sposoby – słownie i rysunkowo.

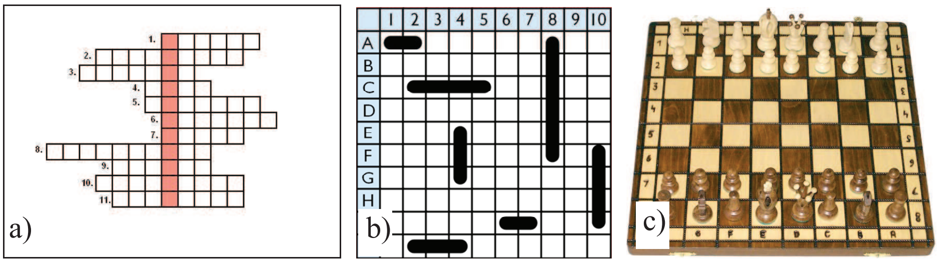
1. Wychodzę z domu i idę w prawo 150 metrów, po czym skręcam w lewo i idę 200 metrów, po czym…

2. Wychodząc z domu, idę ulicą Sienkiewicza po prawej stronie, w kierunku rosnących numerów; na drugim skrzyżowaniu skręcam w ulicę Mickiewicza i idę po stronie numerów nieparzystych w kierunku numerów malejących.
3. Zrób szkic na pustej, białej kartce.
4. Zrób szkic, możliwie w skali, na kartce w kratkę.
5. Zaznacz swoją drogę na planie miasta.

Wszystkie te sposoby są dobre do opisu drogi – określają twoją trasę (tzn. trajektorię ruchu) między domem a szkołą. Oczywiście najlepszym sposobem jest zaznaczenie trajektorii na planie miasta, zob. rys. 3.4. nieco dalej w tym rozdziale.

2. Układ współrzędnych

Rozwiązanie krzyżówki czy zabawa w bitwę morską wymaga dokładnego określenia miejsca obiektu. Na planie miasta są to kwadraty, na mapie Polski – dwie współrzędne geograficzne – „długość” (λ) i „szerokość” (φ). Toruń leży w punkcie określonym przez współrzędne $\lambda = 18°37'E$, $\varphi = 53°01'N$. Oczywiście, aby móc to tak określić, musimy wybrać punkt odniesienia: dla współrzędnej pionowej (N) jest to równik, dla współrzędnej poziomej (E) przedmieście Londynu, Greenwich.



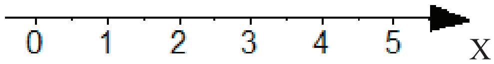
Fot. 3.1. Układ odniesienia jest niezbędny, np.: a) do rozwiązania krzyżówki; b) do gry w bitwę morską; c) do gry w szachy. We wszystkich tych przypadkach podajemy dwie współrzędne – poziomą i pionową, na przykład w bitwie morskiej statek „dwumasztowy” ma współrzędne A1 i A2

Zauważmy, że inaczej trzeba określić położenie w przypadku podróży koleją (tylko odległość od punktu wyjazdu, lub przeznaczenia), inaczej gdy odbywa się podróż samochodem (można wybrać wiele różnych dróg, zob. też. przykład 3.2.), wreszcie w przypadku lotu samolotem pilot podaje zarówno miejsce na mapie („przelatujemy właśnie nad Poznaniem”), jak i wysokość (5 tys. metrów).

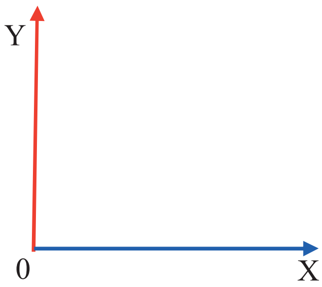
Fot. 3.2. Układ odniesienia jest niezbędny (c.d.), np.: d) do znalezienia ulicy na planie miasta; e) do znalezienia miasta na globusie. Dla ułatwienia znalezienia ulicy na planie miasta korzysta się z tego samego sposobu, co w bitwie morskiej – podaje się kwadrat, w jakim dana ulica się znajduje, np. D3

W zależności od sytuacji układ współrzędnych może więc być:

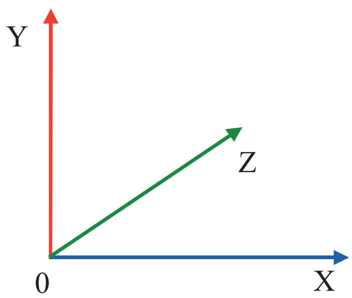
a) osią liczbową w jednym kierunku



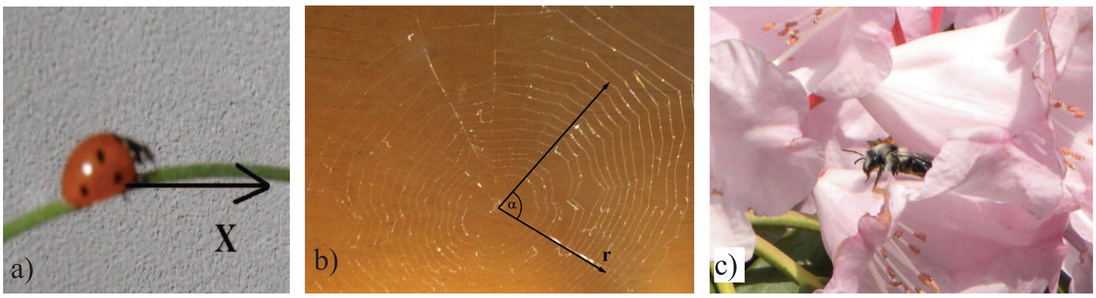
b) układem dwóch osi wzajemnie prostopadłych (tzw. układ kartezjański[9] na płaszczyźnie)



c) układem trzech osi wzajemnie prostopadłych (układ kartezjański w przestrzeni)



W każdym przypadku musimy podać punkt odniesienia (punkt początkowy układu współrzędnych) oraz jednostkę miary. W starożytnym Rzymie wszystkie drogi liczyło się od Rzymu, a jednostką miary był „stadion", czyli około 192 m. W miastach amerykańskich numery domów podaje się nie kolejno, ale jak daleko są od umownego środka miasta, odległość mierzy się w milach (1,6 km). Ale, jak to pokazują poniższe fotografie, możliwych jest wiele innych układów współrzędnych.



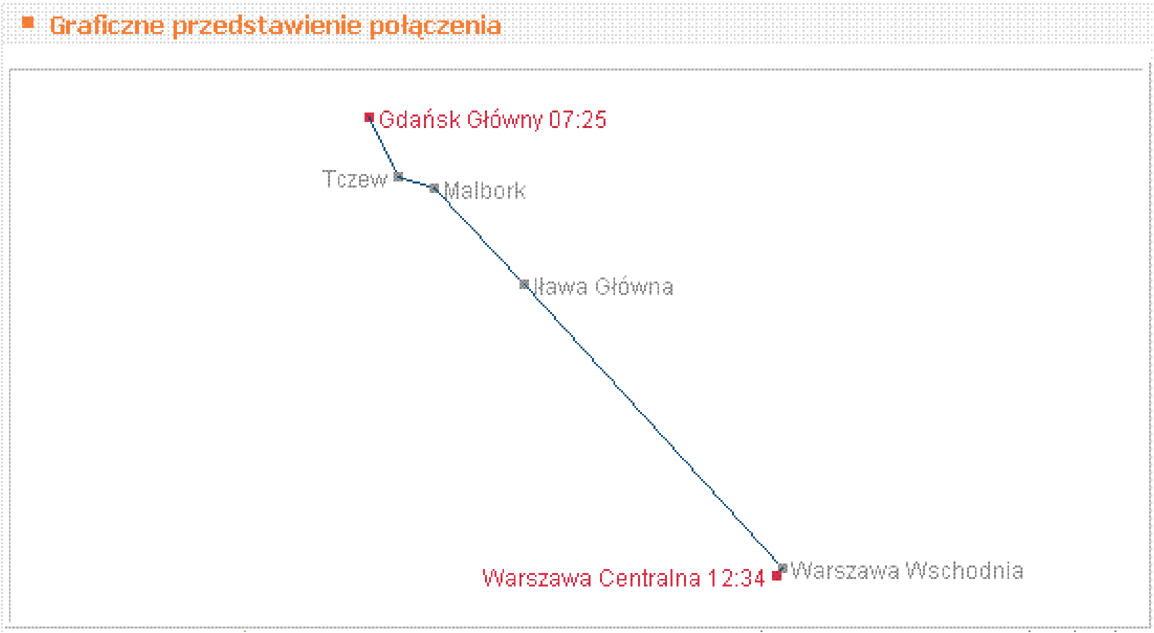
Fot. 3.3. Różne sytuacje wymagają różnego stopnia szczegółowości w opisie położenia: a) w przypadku biedronki na łodydze kwiatu wystarczy podać, jak daleko jest od końca łodygi (przykład jednego *wymiaru*); b) w przypadku pajęczyny trzeba podać, na którym z promieni i na którym okręgu złapała się mucha (przykład ruchu na płaszczyźnie, czyli w dwóch wymiarach); c) pszczoła wśród kwiatów porusza się w trzech kierunkach (góra–dół, lewo–prawo, dalej–bliżej).

Najprostszym przykładem ruchu jest ruch w jednym wymiarze, jak np. biedronki wzdłuż łodygi kwiatu lub biegaczy na dystansie 100 m na prostoliniowym odcinku bieżni.

[9] Od nazwiska wynalazcy, filozofa i fizyka Kartezjusza (1596–1650).

W przypadku ruchu biedronki na łodydze lub pociągu jadącego po torze kolejowym wystarcza zupełnie proste określenie położenia. Gdy mówimy o ruchu pociągu z Krakowa do Warszawy, wystarczy podać, jak daleko jesteśmy od Warszawy (albo Krakowa). W przypadku przejazdu pociągu można przyjąć, nieco upraszczając, że ruch odbywa się tylko w jednym wymiarze. Oczywiście, nie mówimy tu o poszczególnych częściach pociągu jak koła, ale o całym pociągu, najlepiej widzianym z dużej wysokości, tak aby wyglądał jak *punkt materialny*.

W najprostszym przypadku ruchu zakładamy, że obiekty są tak małe, że można je przybliżyć przez ***punkt***. Mówimy o ***ruchu punktu materialnego***.



© PKP http://rozklad-pkp.pl

Rys. 3.2. „Graficzne przedstawienie połączenia” to uproszczona *trajektoria*. Z tego rodzaju wykresu nie potrafimy jeszcze wywnioskować, jak szybko jedzie pociąg na poszczególnych odcinkach drogi

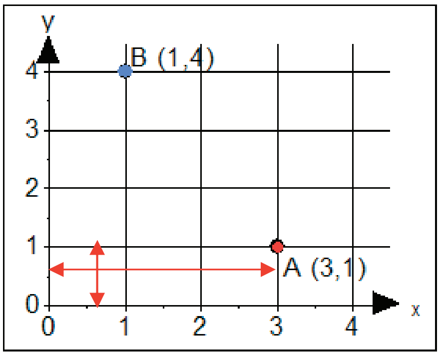
Najczęściej używanym sposobem przedstawienia trajektorii jest wykres na płaszczyźnie, w prostokątnym układzie współrzędnych. Określenie położenia wymaga w tym przypadku podania dwóch liczb – odległości od początku układu współrzędnych wzdłuż osi poziomej (OX) i osi pionowej (OY). Pokażmy to na przykładzie.

Przykład 3.1.

Zaznacz w układzie współrzędnych prostokątnych punkt A o współrzędnych $x_A = 3$ i $y_A = 1$ i punkt B o współrzędnych $x_B = 1$ i $y_B = 4$.

Rozwiązanie:

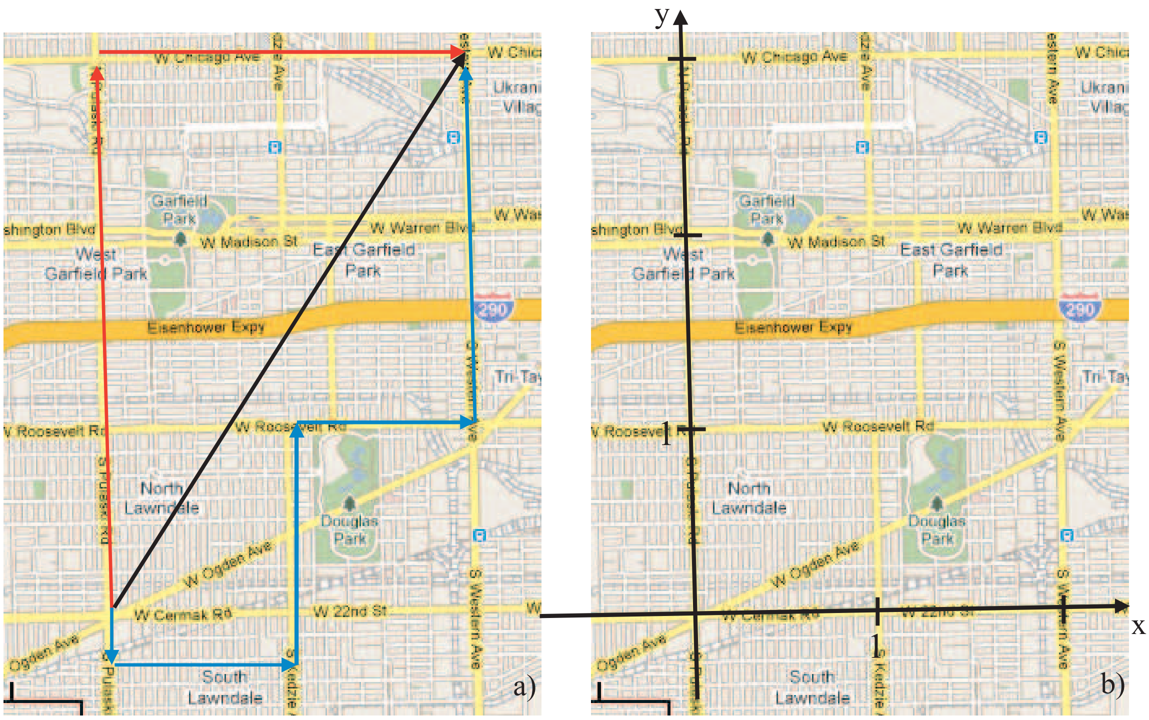
Rysujemy układ współrzędnych prostokątnych i wybieramy jednostki na obu osiach. Aby zaznaczyć $x_A = 3$, odmierzamy 3 jednostki wzdłuż osi OX, aby zaznaczyć $y_A = 1$, odliczamy jedną jednostkę wzdłuż osi OY. Zapis A(3,1) oznacza $x_A = 3$ i $y_A = 1$ lub słownie: idź trzy jednostki w prawo, a następnie jedną jednostkę w górę.



Rys. 3.3. Ilustracja do zadania 2.1. Współrzędne punktu na płaszczyźnie podają odległości od osi OX (współrzędna y) i od osi OY (współrzędna x)

Przykład 3.2.

Plany wielu miast amerykańskich tworzą szachownicę ulic przecinających się pod kątem prostym. W Chicago, na skrzyżowaniu ulicy Pułaskiego i Cermaka (zob. rys. 3.4.) miał miejsce napad. Gangsterzy uciekają samochodem. Ich samochód przejeżdża 3 mile na północ, po czym 2 mile na wschód, ale zatrzymuje się. Helikopter policyjny wyrusza w linii prostej od miejsca napadu do punktu zatrzymania się gangsterów. Ile mil musi przelecieć? Rabusiów goni też inspektor Bagol. Inspektor startuje z miejsca napadu, ale pojechał początkowo w niewłaściwym kierunku, później skręcił, dojechał co prawda do rabusiów, ale dłuższą drogą, zobacz to na rysunku.



Rys. 3.4. a) Trasa gangsterów (czerwone strzałki), helikoptera policji (czarna strzałka) i inspektora Bagola (niebieskie strzałki). Strzałki oznaczają kierunek przemieszczania się gangsterów, policji i Bagola. Jak widzisz, do tego samego punktu końcowego można dotrzeć na różne sposoby; b) jeżeli wprowadzimy układ współrzędnych, najlepiej prostokątnych i wybierzemy właściwe jednostki na osiach (tu jedna mila), to możemy przedstawić kolejne położenia gangsterów w postaci ciągu liczb lub tabelki, zob. poniżej w tekście rozdziału.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa. Elementy trajektorii samochodu tworzą kąt prosty i są dwoma bokami trójkąta, a trajektoria helikoptera (oczywiście widziana z góry) to odcinek zamykający ten trójkąt. Oznaczmy przez a i b długości odcinków przebytych przez samochód rabusiów, a przez c długość lotu w linii prostej helikoptera. Twierdzenie Pitagorasa mówi, że kwadrat długości odcinka c zamykającego trójkąt (tzw. przeciwprostokątnej) jest równy sumie kwadratów długości dwóch boków a i b tworzących kąt prosty (tzw. przyprostokątnych). Zapisujemy to wzorem w sposób następujący:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Podstawiając dane liczbowe a = 3 mile, i b = 2 mile, otrzymujemy $a^2 + b^2 = 13$, czyli $c = \sqrt{13} \approx 3{,}6$ mili. Helikopter musi więc przebyć zaledwie 3,6 mili.

4. Tabelka i wykres

Gangsterzy i Bagol poruszają się po trajektoriach składających się z odcinków linii prostych. Przedstawmy trajektorię inspektora w innej jeszcze postaci – tabelki określającej położenia początku i końca tych odcinków (innymi słowy, podajmy współrzędne kolejnych punktów A, B, C itd., w których Bagol zmieniał kierunek ruchu).

Bagol wystartował z początku układu współrzędnych, tj. z punktu o współrzędnych (0,0), po czym pojechał na południe, do punktu o współrzędnych $x = 0$, $y = -0{,}25$ (w przybliżeniu). Następnie Bagol pojechał na wschód, do punktu o współrzędnej $x = 1$ (i $y = -0{,}25$, niezmieniona). Odczytując kolejne współrzędne, otrzymujemy poniższe zestawienie.

A (0,0) → B (0, -0,25) → C (1, -0,25) → D (1,1) → E (2,1) → F (2,3)

Pamiętajmy, że wybraną jednostką odległości jest mila. Powyższy spis pozwala określić kolejne punkty położenia Bagola, natomiast nic nie mówi o czasie, w jakim znalazł się w tych punktach. Opis ruchu nie jest więc wystarczający.

W naszym poznawaniu praw ruchu zaczniemy od ruchu wzdłuż prostej, a dopiero w dalszej części nauki dokładniej określimy sposoby przewidywania ruchu w dwóch i trzech wymiarach. Ale najpierw jeszcze jedno zadanie związane z Toruniem.

Zadanie 3.2.

Łódka wiosłowa przepływa przez Wisłę szeroką pod Toruniem na 400 metrów. Wioślarz wiosłuje prostopadle do brzegu, ale łódka jest również znoszona przez prąd. W tym czasie, w jakim wioślarz dociera do przeciwległego brzegu, gałązka puszczona z biegiem rzeki przepływa 300 metrów. Jaką całkowitą drogę przebyła łódka?

Rozwiązanie:

Ruch w dwóch prostopadłych kierunkach (w poprzek rzeki dzięki wysiłkowi wioślarza i z prądem, wzdłuż biegu) są niezależne. W tej samej jednostce czasu, w której łódka pokonuje 4 metry w poprzek rzeki, jest znoszona wzdłuż rzeki o 3 metry. Całkowita droga przebyta w poprzek rzeki to a = 400 metrów, a wzdłuż rzeki b = 300 metrów. Dwa kierunki są prostopadłe, stosujemy więc twierdzenie Pitagorasa. Oznaczając przez c całkowitą drogę przebytą przez łódkę, otrzymujemy:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(300)^2 + (400)^2} = 500 \text{ metrów.}$$

3.2 Ruch jednostajny prostoliniowy

Kiedy obserwujemy ruch samochodu po drodze między dwoma tunelami, albo ruch bąbelka powietrza ku górze w szklance wody mineralnej, jest to ruch po linii prostej. W przypadku samochodu lub roweru musimy jeszcze zaznaczyć, o jaką część roweru chodzi. Oczywiście, na prostoliniowym odcinku szosy oś roweru porusza się po linii prostej, ale wentyl koła zatacza bardziej skomplikowaną trajektorię[10]. Prawa ruchu, które będziemy formułować zakładają, że obserwujemy samochód z dużej odległości, tak że wygląda on jak punkt. Takie prawa nazwiemy prawami ruchu *punktu materialnego*. Przypadek, w którym punkt materialny porusza się po prostej ze stałą prędkością, jest najprostszym rodzajem ruchu.

1. Opis ruchu

Aby opisać ruch, nawet prostoliniowy, musimy podać jego współrzędne nie tylko w przestrzeni, ale i w czasie: *gdzie* i *kiedy* znajduje się punkt materialny. Musimy podać swojego rodzaju rozkład jazdy. Innymi słowy, aby opisać ruch, musimy podać parę liczb: odległość (od punktu początkowego pomiaru odległości) i czas, który upłynął od początku jego pomiaru (czyli od startu pomiaru).

Na przykład poniższa tabelka pokazuje rozkład jazdy pociągu z Gdańska do Warszawy z rys. 3.2.

Tab. 3.1. Rozkład jazdy pociągu z Gdańska do Warszawy.

Stacja/przystanek	**przyj.**	**odj.**
Gdańsk Główny		06:59
Tczew	07:34	07:37
Malbork	07:59	08:00
Iława Główna	08:43	08:44
Działdowo	09:22	09:23
Warszawa Wschodnia	11:28	11:30
Warszawa Centralna		11:37

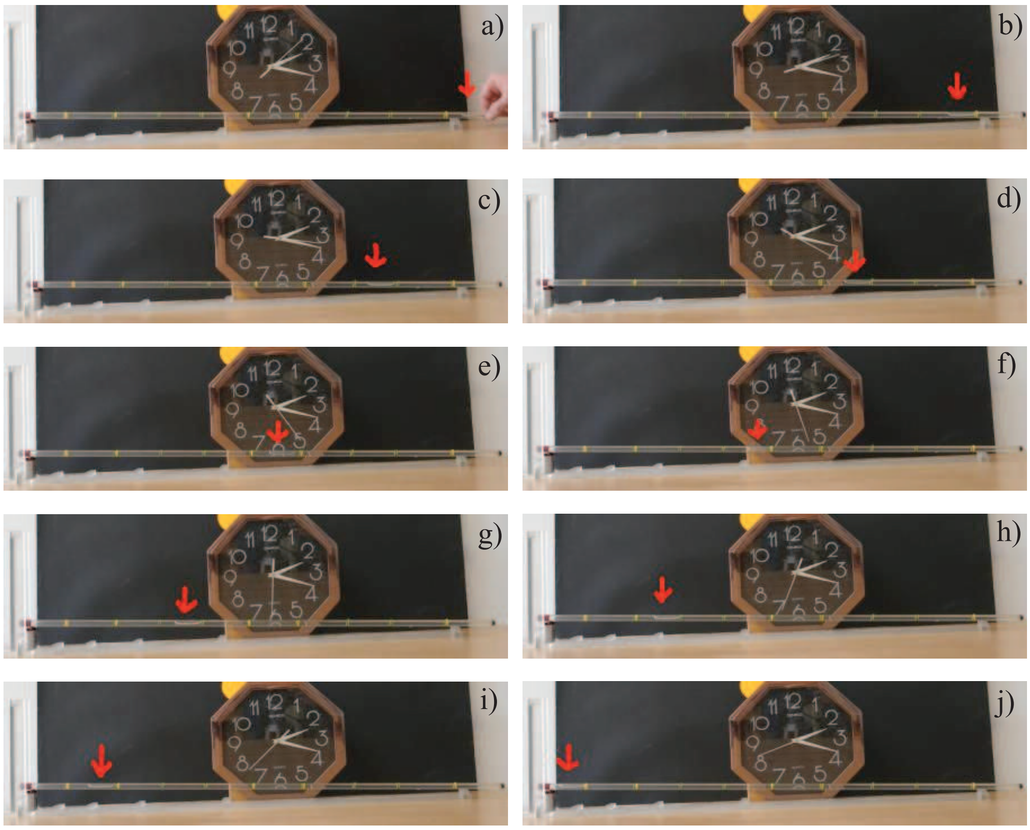
Czytamy z niej, że do Malborka, odległego od Gdańska o 51 km pociąg przyjeżdża po 60 minutach, a do Iławy, odległej od Gdańska o 120 kilometrów, po 104 minutach.

Nie jest prosto znaleźć praktyczne przykłady ruchu jednostajnego. Porusza się w ten sposób, w dużym przybliżeniu, bąbelek gazu w butelce wody mineralnej, skoczek z otwartym spadochronem lub magnes zsuwający się po miedzianej równi (fot. 3.5). Aby ruch bąbelka w cieczy był jednostajny, powinna ona być *lepka*, jak np. olej. Doświadczenie z bąbelkiem w wąskiej (i długiej) rurce z olejem przedstawia fot. 3.4. (film w wersji internetowej).

Na przykładzie bąbelka powietrza w rurce z olejem otrzymujemy następującą tabelkę (tab. 3.2.). W tabelce tej zaczęliśmy mierzyć czas (i odległość) od momentu, kiedy bąbelek przekroczył pierwszą podziałkę (dla uniknięcia niedokładności związanych ze startem bąbelka). Czas oznaczymy literą t (od włoskiego *tempo*), a przebytą drogę przez s (od *strada*). W tym przykładzie czas mierzymy w sekundach, a odległość, dla wygody, w centymetrach[11].

[10] Krzywą, jaką zatacza wentyl koła, nazywamy krzywą „rozwijającego się koła”, z greckiego *cykloidą.*

[11] Uważny czytelnik dostrzeże, że pomiar na fot. 3.4. i dane w tabelce 3.2. różnią się. Dokonaliśmy takiego uproszczenia, tak aby analiza danych liczbowych była łatwiejsza.

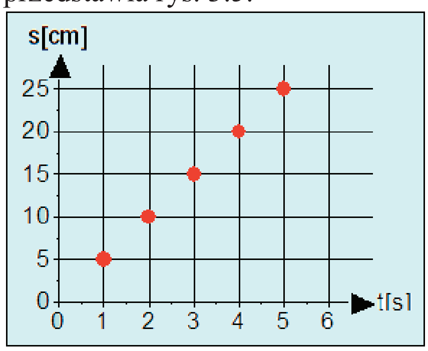


Fot. 3.4. Ruch bąbelka powietrza w lepkiej cieczy jest ruchem jednostajnym. W pokazanej sekwencji w ciągu 30 sekund bąbelek przebył drogę około 1 metra

Tab. 3.2. Pomiar ruchu bąbelka w rurce z cieczą. Kolumna pierwsza oznacza, ile sekund minęło od początku ruchu; kolumna druga oznacza, jaką *całkowitą* drogą przebył bąbelek od momentu startu do końca sekundy z pierwszej kolumny

Czas [s]	Droga [cm]
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25

Zmierzone pary liczb z tabelki możemy przedstawić na wykresie, w którym na osi poziomej (OX), czyli osi czasu, zaznaczamy momenty czasu *t*, a na osi pionowej (OY) zaznaczamy położenie *s* punktu w tym momencie czasu (innymi słowy, przebytą drogę). Wykres przedstawia rys. 3.5.



Rys. 3.5. Zależność *czasowa* – $s(t)$, przebytej drogi od czasu dla ruchu pęcherzyka w rurce na podstawie danych z tabelki 3.2

Na powyższym wykresie:

- współrzędna pozioma zaznaczonego punktu mówi, *kiedy* (określa moment czasu t),
- współrzędna pionowa mówi, *gdzie* znajduje się punkt w momencie czasu t.

Jak widzisz z wykresu $s(t)$ (rys. 3.5.), poszczególne punkty układają się na linii prostej. Ruch, w którym punkty na wykresie *czas* ↔ *położenie* układają się na linii prostej, nazywamy *ruchem jednostajnym*. Dlaczego, wyjaśnimy za chwilę.
Zauważmy dodatkowo, że w tabelce w każdym wierszu tabelki 3.2. stosunek całkowitej drogi przebytej do zużytego czasu jest taki sam; przedstawiamy to dokładniej w tabelce 3.3.

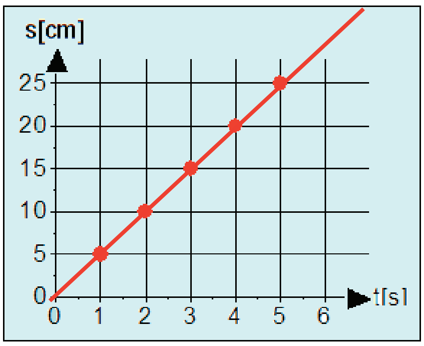
Fot. 3.5. Ruchem jednostajnym zsuwa się też neodymowy magnes po miedzianej płycie.

Tab. 3.3. Pomiar ruchu bąbelka w rurce z cieczą. Kolumna pierwsza oznacza czas w sekundach, który minął od początku ruchu. Kolumna druga oznacza drogę, którą przebył bąbelek do końca sekundy podanej w pierwszej kolumnie. Kolumnę trzecią otrzymujemy z podzieleniA przebytej drogi przez zużyty czas.

Czas [s]	Droga [cm]	Droga/Czas [cm/s]
1	5	5
2	10	5
3	15	5
4	20	5
5	25	5

Dla zmiennych s i t z tabeli 3.3., stosunek odpowiadających sobie wartości pozostaje stały, nazywamy je *wprost proporcjonalnymi*. W lodziarni wartość wydanych pieniędzy jest proporcjonalna do liczby zakupionych gałek lodów. Bardzo wiele wielkości w przyrodzie jest wzajemnie proporcjonalnych.

Znaleźliśmy kolejną właściwość ruchu bąbelka w cieczy: *przebyta droga jest wprost proporcjonalna do czasu*. Zależność proporcjonalna na wykresie $s(t)$ jest linią prostą.



Rys. 3.6. W ruchu jednostajnym przebyta droga jest *wprost proporcjonalna* do czasu ruchu. Wykresem takiej zależności $s(t)$ jest linia prosta.

2. Prędkość w ruchu jednostajnym

Ruch *jednostajny* jest najprostszym przykładem ruchu. Jak widzieliśmy z tabeli 3.3., *przebyta droga* jest proporcjonalna do *czasu*, który upłynął. Ruch jednostajny możemy zdefiniować też inaczej – jako ruch o stałej *prędkości*.

Policzmy (tabela 3.4.) *poszczególne odcinki* drogi przebyte w *poszczególnych odcinkach* czasu. Innymi słowy pytamy teraz, jaką drogę przebył bąbelek w *pierwszej, drugiej, trzeciej* sekundzie ruchu w odróżnieniu od poprzedniej tabeli, gdzie badaliśmy *całkowitą drogę* przebytą od początku ruchu do *końca* określonej sekundy[12].

Tab. 3.4. Pomiar ruchu bąbelka w rurce z cieczą. W trzeciej kolumnie zaznaczyliśmy drogi Δs przebyte w kolejnych sekundach: *pierwszej, drugiej, trzeciej* itd. W każdej sekundzie bąbelek przebywa taką samą drogę; mówimy, że *prędkość* ruchu jest *stała.*

Czas [s]	Droga [cm]	Δs [cm]
0	0	
		5
1	5	
		5
2	10	
		5
3	15	
		5
4	20	
		5
5	25	

Zauważmy z tabeli 3.4., że w każdym odcinku czasu ciało przebywa równe odcinki drogi. W naszym przypadku jest to 5 centymetrów przebytej drogi w każdej sekundzie.

Możemy więc zdefiniować *prędkość* ruchu *v* (od włoskiego *velocità*) w każdej sekundzie ruchu jako stosunek przebytej drogi do czasu

$$\boxed{\mathrm{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}} \qquad (3.1.)$$

gdzie: Δs jest odcinkiem przebytej drogi, a Δt jest odcinkiem czasu.

W ruchu jednostajnym *prędkość* ruchu pozostaje *stała*.

$$\boxed{\mathrm{v} = const} \qquad (3.2.)$$

Taka zależność jest jednocześnie definicją ruchu jednostajnego.

Definicja

W ruchu ***jednostajnym*** w równych odcinkach czasu ciało przebywa równe odległości – prędkość ruchu pozostaje stała.

Jeżeli prędkość ruchu pozostaje stała, to obliczenie przebytej drogi jest proste – wystarczy pomnożyć prędkość przez czas, który minął od początku ruchu.

Przebyta droga *s* w ruchu jednostajnym jest iloczynem prędkości v i czasu *t*

$$\boxed{s = \mathrm{v} \cdot t} \qquad (3.3.)$$

[12] Zwracamy uwagę na to istotne rozgraniczenie. Określenie „t = 5s” („po upływie pięciu sekund”) oznacza punkt na osi czasu, określenie „w piątej sekundzie” oznacza *odcinek* na osi czasu między punktami t = 4, a t = 5.

Przykład 3.3.

Pociąg między Iławą a Warszawą jedzie ze stałą prędkością 80 km/h. Jaka odległość dzieli te dwa miasta, jeżeli podróż trwa 3 godziny?

Rozwiązanie:

Poszukujemy drogi s, jaką pociąg jadący z prędkością 80 km/h przebywa w ciągu 3 godzin:
$v = 80$ km/h
$t = 3$ h
$s = ?$

Korzystamy ze wzoru (3.3.) $s = v \cdot t$.

Podstawiając dane liczbowe, otrzymujemy:

$$s = 80\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 3\ \text{h} = 240\ \text{km}.$$

Odpowiedź:

Iławę od Warszawy, wzdłuż linii kolejowej, dzieli 240 km.

Przykład 3.4.

Kierowca na autostradzie A1 ustawił automat na prędkość 120 km/h. Jaką drogę przebędzie samochód w ciągu 15 minut? Jeśli utrzyma tę prędkość przez 45 minut, jaką drogę przebędzie?

Fot. 3.6. Prędkościomierz samochodu (po prawej). Automat ustawił prędkość jazdy na 120 km/h.

Rozwiązanie:

Ponieważ prędkość pozostaje stała, możemy skorzystać ze wzoru na drogę $s = v \cdot t$

i) $t = 15\ \text{min} = \frac{1}{4}\text{h}$,

$$s = 120\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{4}\text{h} = 30\ \text{km}.$$

W ciągu 15 minut samochód przebędzie 30 kilometrów.

ii) $t = 45\ \text{min} = \frac{3}{4}\text{h}$,

$$s = 120\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{3}{4}\text{h} = 90\ \text{km}.$$

W ciągu 45 minut samochód przebędzie 90 kilometrów.

Czasem wzór (3.3.) wymaga uzupełnienia. Dzieje się tak wówczas, jeśli pomiar czasu zaczynamy później, niż zaczął się ruch. Rozważmy ponownie przykład pociągu z Gdańska do Warszawy.

Przykład 3.5.

Pociąg z Gdańska do Warszawy wyjeżdża ze stacji Iława o godzinie 9:00 i dojeżdża do stacji Warszawa Wschodnia o godzinie 12:00, jadąc ze stałą prędkością 80 km/h. Odległość z Gdańska od Iławy wynosi 120 km. Jaką całkowitą drogę przebył ten pociąg?

Rozwiązanie:

Dane:
$v = 80$ km/h,
$t = 3$ h,
s_o=120 km (droga z Gdańska do Iławy).

Aby obliczyć całkowitą drogę z Gdańska do Warszawy, musimy zsumować dwa odcinki drogi – z Gdańska do Iławy i z Iławy do Warszawy. Oznaczmy przez s_1 drogę przebytą między Iławą a Warszawą. Obliczamy tę drogę ze wzoru (3.3.):

$$s_1 = v \cdot t = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 3\text{h} = 240 \text{ km}.$$

Całkowita droga s z Gdańska do Warszawy jest sumą s_0 i s_1 i wyniesie

$$s = s_0 + v \cdot t = 120 \text{ km} + 240 \text{ km} = 360 \text{ km}.$$

Odpowiedź:
Całkowita droga pociągu z Gdańska do Warszawy wyniosła 360 km.

Doszliśmy w ten sposób do ważnego uogólnienia wzoru na drogę w ruchu jednostajnym

$$\boxed{s = \mathrm{v} \cdot t + s_0} \tag{3.4.}$$

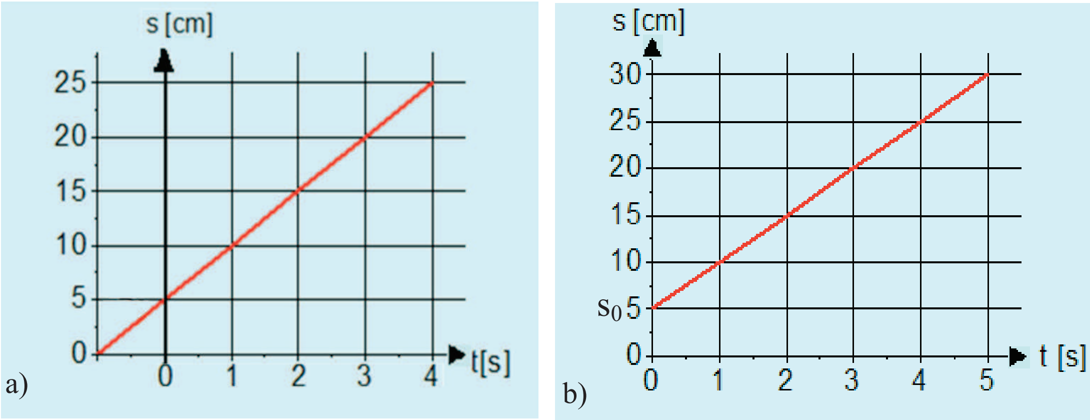
gdzie: s jest przebytą drogą, v – prędkością ruchu, t – czasem, a s_0 drogą przebytą, zanim zaczęto pomiar czasu (*drogą początkową*).

Zauważmy, że w naszym przykładzie bąbelka w cieczy pomiar odległości przeprowadziliśmy w taki właśnie sposób: nie od kreski ‘zerowej’, ale od pierwszej. Bąbelek, w momencie czasu $t = 0$ przebył już drogę $s_0 = 5$ cm. Przedstawia to poniższa tabelka.

Tab. 3.5. Pomiar drogi przebytej przez bąbelek, z uwzględnieniem *drogi początkowej* $s_0 = 5$cm.

Czas [sekundy]	Droga [cm]
0	5
1	10
2	15
3	20
4	25
5	30

Na wykresie zależności $s(t)$ droga s_0 odpowiada punktowi na osi pionowej (OY). Wykres zależności $s(t)$ jest nadal linią prostą o takim samym nachyleniu jak poprzednio, ale zaczyna się on w punkcie o współrzędnych $(0, s_0)$, zob. rys. 3.7.



Rys. 3.7. Zależność przebytej drogi od czasu w przypadku drogi początkowej s_0 różnej od zera: a) droga początkowa różna od zera odpowiada sytuacji, w której zaczynamy mierzyć czas później, niż zaczął się ruch; b) z drugiej strony droga początkowa s_0 oznacza, że odległość mierzymy nie od punktu początkowego ruchu, ale od innego punktu.

Innym przykładem, w którym korzystamy ze wzoru (3.4.) są rajdy piesze, wyścigi kolarskie, rajdy samochodowe itp. W określonym dniu, np. we wtorek, turyści wędrują przez kilka godzin z określoną prędkością. Dla obliczenia trasy, którą przeszli tego dnia, korzystamy ze wzoru (3.3.); dla określenia, ile przeszli od początku rajdu, do drogi z wtorku należy dodać drogę s_0, którą przeszli *do* wtorku.

3.3. Prędkość średnia i prędkość chwilowa

Jak już mówiliśmy, aby zmierzyć prędkość ruchu, musimy dokonać pomiaru przebytej drogi i pomiaru czasu, w którym ta droga została przebyta. Stosunek przebytej Δs drogi do czasu Δt, w jakim ta droga została przebyta, określa *chwilową prędkość* w danym czasie Δt:

$$\mathrm{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

gdzie: Δs jest odcinkiem przebytej drogi, a Δt jest odcinkiem czasu.

Jak wiemy, prędkość ruchu, np. autobusu w ruchu miejskim, zmienia się co chwilę. Prędkościomierz samochodu w każdej chwili wskazuje prędkość, z jaką się samochód porusza. Jest to tak zwana **prędkość chwilowa**. Prędkość wskazywana może się zmieniać, w zależności od tego, czy autobus rusza z przystanku, hamuje, czy wreszcie stoi. Aby prędkość obliczona ze wzoru (3.5.) odpowiadała wskazaniom prędkościomierza, odcinki czasu Δt muszą być dostatecznie krótkie.

Prędkość ***chwilową*** v definiujemy jako stosunek przebytej Δs drogi do czasu Δt, w jakim ta droga została przebyta, przy założeniu, że ***czas*** Δt jest dość ***krótki.***

Czym innym jest prędkość *średnia* ruchu. Aby obliczyć prędkość średnią, musimy zmierzyć jedynie czas *całego ruchu*, od jego początku do końca, oraz *całkowitą* drogę przebytą.

$$\boxed{\mathrm{v}_{śr} = \frac{s}{t}} \qquad (3.5.)$$

Prędkość ***średnią*** $\mathrm{v}_{śr}$ definiujemy jako stosunek ***całkowitej*** przebytej s drogi do ***całkowitego*** czasu t, od początku do końca ruchu.

W przykładzie 3.5. droga między Gdańskiem a Warszawą Centralną wynosi 360 km, a pociąg przebywa tę drogę w 5 godzin. Średnia prędkość wynosi więc

$$v_{śr} = \frac{s}{t} = \frac{360\text{km}}{5\text{h}} = 72\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Prędkość, jaką rozwija pociąg w czasie jazdy, jest oczywiście wyższa, ale obliczenie prędkości średniej uwzględnia również postoje, przyspieszanie i hamowanie.

Rozważmy teraz inne przykłady:

Przykład 3.6.

Plan pieszej pielgrzymki jest następujący:
godz. 8:00 wyjście
godz. 10:00–10:30 postój (drugie śniadanie, napoje)
godz. 12:30–13:30 postój (obiad)
godz. 15:30–16:00 postój (odpoczynek, napoje)
godz. 18:00 dojście na nocleg.

Zakładając, że prędkość marszu wynosi 4 km/h, możemy obliczyć:
1. całkowitą drogę przebytą tego dnia,
2. średnią prędkość pielgrzymki tego dnia.

Fot. 3.7. Plan marszu pielgrzymki, tzw. marszruta, jest skomplikowana.

Rozwiązanie:

Obliczmy najpierw całkowitą drogę przebytą s. Całkowita droga przebyta składa się z trzech odcinków: s_1 (od 8:00 do 10:00), s_2 (od 10:30 do 12:30), s_3 (od 13:30 do 15:30) i s_4 (od 16:00 do 18:00).

$t_1 = 2$ h, $t_2 = 2$ h,

$t_3 = 2$ h, $t_4 = 2$ h.

Zatem: $s_1 = v \cdot t_1 = 4\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 2\text{h} = 8$ km.

W ten sam sposób obliczamy s_2, s_3 i s_4 i otrzymujemy: $s_2 = 8$ km, $s_3 = 8$ km, $s_4 = 8$ km.

Całkowita droga przebyta $s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 32$ km.

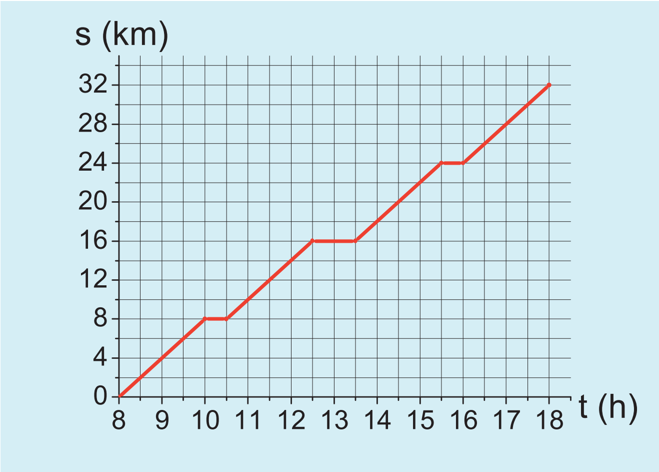
Prędkość średnią obliczymy ze wzoru $v = \frac{s}{t}$.

Całkowity czas przejścia tego dnia wyniósł 10 godzin.

Podstawiające dane liczbowe

$$v = \frac{s}{t} = \frac{32\text{km}}{10\text{h}} = 3{,}2\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Prędkość średnia wyniosła 3,2 km/h, a całkowita droga przebyta to 32 km.



Rys. 3.8. Zależność *czasowa* – $s(t)$ przebytej drogi od czasu dla ruchu pielgrzymki z przykładu 3.6.

Prędkość średnia zależy oczywiście od prędkości chwilowych, ale w różnych przypadkach są to różne zależności. Rozważmy dwa przykłady.

Przykład 3.7.

Przejazd z Gdańska do Torunia składa się z dwóch odcinków. Na autostradzie samochód jedzie z prędkością 120 km/h przez 1 godzinę, po czym przez kolejną godzinę po drodze zwykłej, z prędkością 60 km/h. Oblicz prędkość średnią samochodu na całej trasie.

Fot. 3.8. Autostrada z Gdańska do Torunia kończy się w Świeciu (2010 r.), a dalej prowadzi zwykła droga. Średniej prędkości na całej trasie nie możemy obliczać jako średniej z prędkości na poszczególnych odcinkach – potrzebna jest informacja, ile te odcinki wynoszą, zob. rozwiązanie poniżej

Rozwiązanie:

Obliczmy najpierw całkowitą drogę przebytą. Składa się ona z dwóch odcinków, s_1 przebytej z prędkością $v_1 = 120$ km/h i odcinka s_2 przebytego z prędkością $v_2 = 60$ km/h.
Czasy przejazdu obu odcinków t_1 i t_2 są takie same $t_1 = t_2 = 1$h.

$$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 120\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1\text{h} = 120\text{km}$$

$$s_2 = v_2 \cdot t_2 = 60\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1\text{h} = 60\text{km}$$

Całkowita droga wynosi: $s = s_1 + s_2 = 120$ km + 60 km = 180 km.

Prędkość średnia $v_{śr} = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{180\,\text{km}}{2\,\text{h}} = 90\frac{\text{km}}{\text{h}}.$

Zauważ, że w tym przypadku prędkość średnia 90 km/h jest *średnią arytmetyczną* z dwóch prędkości v_1= 120 km/h i v_2 = 60 km/h, ale jest to bardzo szczególny przypadek. Rozważmy inny przykład.

Przykład 3.8.

Samochód przejeżdża 120 km z prędkością 120 km/h, po czym 120 km z prędkością 60 km/h. Obliczyć całkowity czas przejazdu i średnią prędkość.

Rozwiązanie:

Dane:
$s_1 = 120$ km,
$v_1 = 120$ km/h,
$s_2 = 120$ km,
$v_2 = 60$ km/h.

Korzystamy ze wzoru (3.1.), przez t_1 i t_2 oznaczamy odpowiednio czasy przejazdu odcinków s_1 i s_2:

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1}, \text{ stąd } t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{120 \text{ km}}{120 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 1 \text{ h}.$$

Podobnie $t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{120 \text{ km}}{60 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 2 \text{ h}.$

Całkowity czas przejazdu wyniósł: $t = t_1 + t_2 = 3$ h.

Średnia prędkość wyniosła: $v_{śr} = \frac{s_1 + s_2}{t} = \frac{240 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$

Odpowiedź:

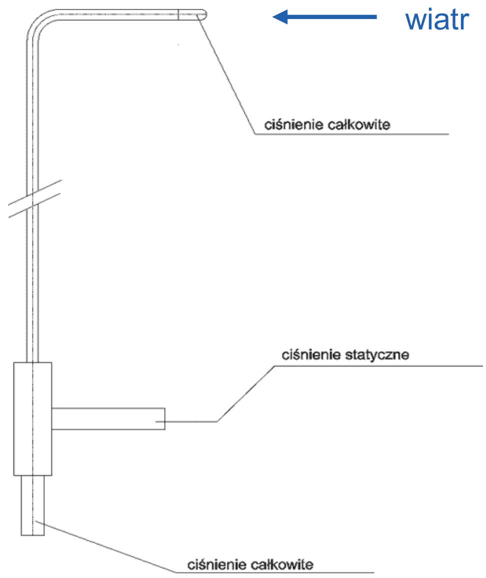
Całkowity czas przejazdu wyniósł 3 godziny, a średnia prędkość wyniosła 80 km/h. Prędkość ta była mniejsza od prędkości w poprzednim przykładzie. Zwróć uwagę, jak były sformułowane oba zadania.

Jak mierzy prędkość samochód, a jak samolot?

Aby zmierzyć prędkość chwilową, możemy skorzystać z tej samej metody do obliczenia prędkości średniej: zmierzyć przebytą drogę w określonym czasie. Tak to się robi na przykład w zawodach bicia rekordów szybkości na wyschniętym słonym jeziorze Bonneville Salt Flats w USA. Samochód (lub inny pojazd) najpierw się rozpędza na dystansie kilku mil, a samą prędkość mierzy się na odcinku jednej mili (1,6 km). Oczywiście, można by wybrać krótszy odcinek (i czas) pomiaru, jako że i na odcinku jednej mili prędkość może się zmieniać. Ale jak krótki?

Można liczyć czas przejazdu między słupkami na autostradzie (100 m), ale i na tak krótkim odcinku może zdarzyć się nagłe hamowanie. Wyznaczenie prędkości przez pomiar odległości i czasu może nastręczać pewnych trudności. Prędkościomierz samochodu działa więc na innej zasadzie. Poruszające się koło napędza urządzenie do wytwarzania prądu, małą prądnicę, wytworzony prąd przepływa przez nią, a ta z kolei powoduje odchylenie się wskazówki pomiaru prądu elektrycznego z prądnicy napędzanej przez obracające się koło. Nowoczesne prędkościomierze zliczają impulsy w określonym czasie z nacięć na obracającym się kole.

Prędkościomierz samolotu działa na jeszcze innej zasadzie. W powietrzu nie ma słupków kilometrowych, aby mierzyć odległość. Jedynym ośrodkiem odniesienia jest właśnie powietrze. Czujnik prędkości w samolocie wykorzystuje obecność powietrza, a właściwie jego *ciśnienie*. Ciśnienie to jest inne, jeżeli mierzymy je w kierunku lotu, inne jeśli mierzymy je „z boku”. Urządzenie do pomiaru prędkości samolotu składa się z dwóch rurek mierzących ciśnienie, tzw. rurek Pitota. Prędkość wyznacza się z porównania ciśnień w obu rurkach.

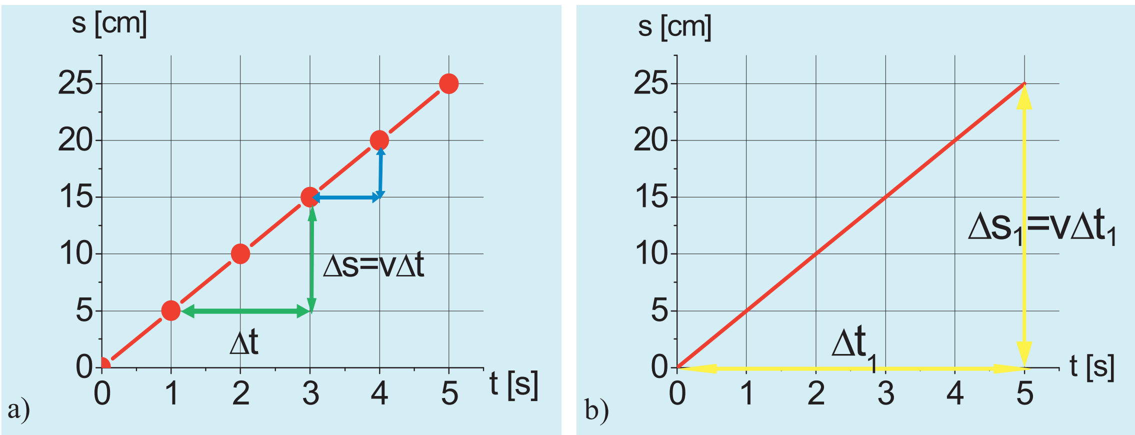


Rys. 3.9. Urządzenie do pomiaru prędkości samolotu (względem powietrza) – tzw. rurka Pitota. Zagięty koniec rurki, wychodzący na zewnątrz samolotu jest skierowany w kierunku lotu i mierzy całkowite ciśnienie (statyczne plus dodatkowe ciśnienie wynikające z prędkości lotu); ciśnienie statyczne jest natomiast mierzone w miejscu osłoniętym od wiatru. Awaria tego urządzenia (i w efekcie błędny pomiar prędkości lotu) były powodem katastrofy Airbusa lecącego z Paryża do San Paolo w 2008 roku

3.4. Droga w ruchu jednostajnym

Obliczenie drogi i jej przedstawienie graficzne jest proste w przypadku stałej prędkości ruchu. Zazwyczaj jednak prędkość ruchu się zmienia. Powtórzmy to jeszcze raz.

Zacznijmy od znanego już przykładu obliczenia drogi, którą przebył pęcherzyk od początku ruchu (od chwili $t = 0$) do końca sekundy t_1. Wróćmy do zależności drogi od czasu i definicji prędkości, zob. rys. 3.10. poniżej.



Rys. 3.10. Zależność przebytej drogi od czasu w ruchu jednostajnym: a) prędkość v definiujemy jako stosunek przyrostu drogi Δs do czasu Δt , w którym ta droga została przebyta. Przebyta droga wyraża się więc wzorem $\Delta s = \mathrm{v}\, \Delta t$; b) jeżeli prędkość ruchu pozostaje stała, przebytą drogę s_1 w czasie t_1 możemy obliczyć w taki sam sposób: $s_1 = \mathrm{v}\, t_1$.

Prędkość ruchu zdefiniowaliśmy jako stosunek *przyrostu* drogi do *przyrostu* czasu:

$$\mathrm{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

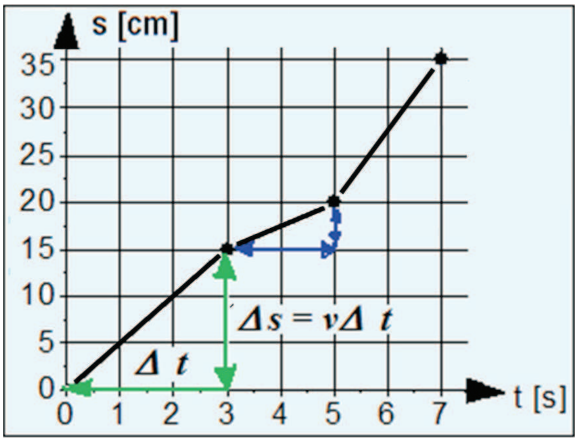
Jeżeli prędkość ruchu pozostaje stała, to droga i prędkość są wprost proporcjonalne. Jeżeli zwiększymy przedział czasu dwukrotnie, to i droga przebyta zwiększy się dwukrotnie, jeśli czas zwiększy się trzykrotnie, to i droga zwiększy się trzykrotnie itd. Na rysunku 3.10. trójkąt składający się z niebieskich strzałek (Δt = 1 s) i trójkąt składający się z zielonych strzałek (Δt = 2 s) są trójkątami podobnymi. W każdym tym trójkącie stosunek Δs do Δt pozostaje stały i wynosi v, jak to było we wzorze (3.1.). Aby obliczyć Δs, musimy więc pomnożyć Δt przez prędkość v:

$$\Delta s = \mathrm{v} \cdot \Delta t.$$

Jednocześnie również duży trójkąt, zaznaczony na żółto na rys. 3.10b. jest podobny do małych trójkątów z rysunku 3.10a. Drogę przebytą w czasie t_1 od początku ruchu możemy więc obliczyć w podobny sposób:

$$s_1 = \mathrm{v} \cdot t_1.$$

Wzór $\Delta s = \mathrm{v} \cdot \Delta t$ pozwala nam obliczyć drogę również w przypadku ruchu, w którym prędkość się zmienia, zob. rys. 3.11.



Rys. 3.11. Zależność przebytej drogi od czasu w ruchu niejednostajnym tzn. w ruchu, w którym prędkość się zmienia.

Przykład 3.9.

Samochód jechał 3 sekundy z prędkością 5 m/s, po czym 2 sekundy z prędkością 2,5 m/s i 2 sekundy z prędkością 7,5 m/s. Oblicz drogę, jaką przebył w tym czasie (tj. w ciągu 7 sekund).

Rozwiązanie:

Aby obliczyć drogę całkowitą, policzmy najpierw drogi przebyte w trzech odcinkach czasu. Korzystamy ze wzoru:

$\Delta s = \mathrm{v} \cdot \Delta t.$

Podstawiając kolejno:

$\mathrm{v}_1 = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ i $(\Delta t)_1 = 3$ s otrzymujemy $(\Delta s)_1 = 15$ m,

$\mathrm{v}_2 = 2{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ i $(\Delta t)_2 = 2$ s otrzymujemy $(\Delta s)_2 = 5$ m,

$\mathrm{v}_3 = 7{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ i $(\Delta t)_3 = 2$ s otrzymujemy $(\Delta s)_3 = 15$ m.

Całkowita droga $s = (\Delta s)_1 + (\Delta s)_2 + (\Delta s)_3 = 15 + 5 + 15 = 35$ m.

3.5. Ruch jednostajnie przyspieszony

W poprzednim rozdziale został omówiony najprostszy przypadek ruchu. Dobrze wiesz, że w życiu codziennym bardzo trudno poruszać się z taką samą prędkością. Jeśli jedziesz do szkoły autobusem, to nie porusza się on cały czas ze stałą prędkością. Kiedy wsiadasz na przystanku, autobus stoi – koła się nie toczą, a prędkościomierz wskazuje zero. Gdy autobus włącza się do ruchu, to jego prędkość wzrasta do około 50 km/h (jeśli jest to autobus miejski). Jeśli prędkość jakiegoś ciała – w naszym przykładzie autobusu, wzrasta, to mówimy, że autobus *przyspiesza.* Natomiast ruch takiego autobusu nazywamy ruchem przyspieszonym.

Przykład 3.10.

Często w programach motoryzacyjnych podawana jest informacja o „przyspieszeniu do setki". Porównywany jest czas potrzebny do osiągnięcia prędkości 100 km/h. W tabeli zebrano dane dotyczące kilku modeli samochodów.

Tab. 3.6. Dane w tabeli na podstawie: http://ikm.net.pl/statystyki/maxprz.php oraz http://ikm.net.pl/statystyki/minprz.php

Samochód	Czas potrzebny na osiągnięcie prędkości 100 km/h
Fiat 126 p (maluch)	51 s
Fiat cinquecento	30 s
Volkswagen Polo III	21,4 s
Skoda Fabia	19,5 s
Ferrari 575 Maranello	4,3 s
Lamborghini Murcielago	3,8 s
Mc Laren F1	3,4 s

Korzystając z tabeli, odpowiedz na pytania:

1. Który z samochodów wykazuje największe przyspieszenie?
2. Które modele samochodów mogłyby konkurować w wyścigach Formuły 1?
3. Który z samochodów często spotykanych na polskich drogach ma największe przyspieszenie?

Zapiszemy definicję przyspieszenia:

> ***Przyspieszenie*** „*a*" definiujemy jako stosunek zmiany prędkości Δv do czasu Δ*t* , w jakim ta zmiana nastąpiła.

Sprawdzimy, jaka jest jednostka przyspieszenia. Prędkość mierzymy w metrach na sekundę, a czas w sekundach. Wstawiamy jednostki do definicji:

$$\left[\frac{\Delta v}{\Delta t}\right] = \frac{\frac{m}{s}}{s} = \frac{m}{s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{m}{s\cdot s} = \frac{m}{s^2}.$$

Jednostką przyspieszenia jest **stosunek przyrostu prędkości** (mierzony w m/s) **do czasu** (mierzonego w sekundach), czyli $\frac{m/s}{s}$, w skrócie m/s^2.

Przykład 3.11.

Samochód ruszył z parkingu i po czasie 10 sekund osiągnął prędkość 20 m/s (czyli 72 km/h). Jakie było jego przyspieszenie?

Rozwiązanie:

Aby obliczyć przyspieszenie, wstawiamy dane do definicji. Zmiana prędkości wynosi 20 m/s (ponieważ prędkość początkowa była równa zeru):

$$przyspieszenie = \frac{20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10\ \mathrm{s}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Słowo przyspieszenie zastępowane jest literą „a". Symbol ten pochodzi od włoskiego słowa *accelerazione*, które oznacza przyspieszenie. Jak zapisać zmianę prędkości? To proste. W poprzednim przykładzie obliczyliśmy ją, odejmując początkową prędkość od końcowej. Symbolicznie zapisana definicja przyspieszenia ma postać:

$$a = \frac{\mathrm{v}_k - \mathrm{v}_p}{\Delta t} \tag{3.6.}$$

We wzorze (3.6.) prędkość końcowa oznaczona jest v_k, prędkość początkowa v_p, Δt oznacza zaś przedział czasu.

W wielu przypadkach, na przykład spadających kamieni lub kulek staczających się po pochylonym stole, przyrosty prędkości w równych odcinkach czasu pozostają stałe – innymi słowy *przyspieszenie* pozostaje *stałe*. Taki rodzaj ruchu ma swoją (zarezerwowaną) nazwę – nazywamy go ruchem *jednostajnie przyspieszonym*.

Jeżeli przyspieszenie w ruchu pozostaje stałe,
to taki ruch nazywamy ***jednostajnie*** przyspieszonym.

Przypomnij sobie, co oznacza słowo jednostajny. Możesz zajrzeć do poprzedniego tematu.

W tym temacie słowo „jednostajnie" nie odnosi się do prędkości, ale do przyspieszenia. Sformułowanie „jednostajnie przyspieszony" oznacza, że w ustalonym przedziale czasu (np. w każdej sekundzie) prędkość będzie wzrastała o tę samą wartość.

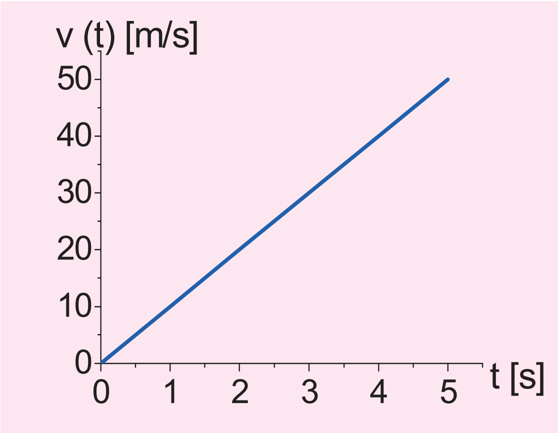
Przykład 3.12.

Galileo Galilei[13], jak głosi legenda[14], badał zmiany prędkości różnych ciał spadających z wieży w Pizie. Dzisiejsze, znacznie dokładniejsze doświadczenia wykazują, że w czasie każdej sekundy ciało spadające zwiększa swoją prędkość o około 10 metrów na sekundę (dokładniej np. 9,81 m/s w Toruniu). Skoro prędkość zmienia się w każdej sekundzie o 10 m/s, to przyspieszenie wynosi 10 m/s².

Ciała swobodnie spadające poruszają się ruchem jednostajnie przyspieszonym.

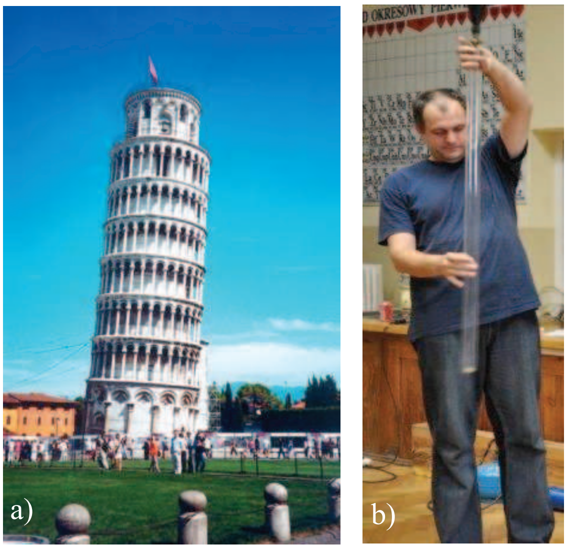
Przedstawmy na wykresie, jak zmienia się prędkość w spadku swobodnym. Jeżeli przyspieszenie wynosi 10 m/s², to po pierwszej sekundzie prędkość wyniesie 10 m/s, po drugiej 20 m/s, a po trzeciej 30 m/s. Punkty na wykresie prędkości w zależności od czasu układają się na linii prostej.

[13] Galileusz odkrył satelity Jowisza, góry na Księżycu, jako pierwszy opisał prawa ruchu.
[14] Legenda legendą, ale Galileusz mógł badać spadek ciał z Krzywej Wieży, która już wówczas była znacznie pochylona. Postawiona na bagnistym gruncie w XIII wieku zaczęła się chylić po zbudowaniu trzeciej kondygnacji. Wyprostował ją (ale nie do końca, tak aby pozostała „krzywa") dopiero Polak, profesor Andrzej Jamiołkowski z Politechniki w Turynie, w 1999 roku.



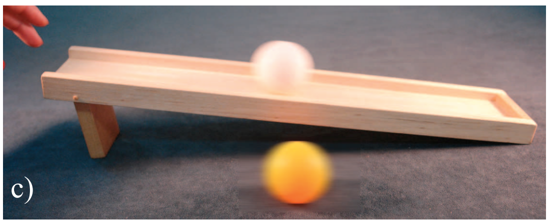
Rys. 3.12. Zależność *prędkości* od czasu w spadku swobodnym (zakładamy wartość przyspieszenia równą 10 m/s^2). Prędkość jest *wprost proporcjonalna* do czasu ruchu. Zwróć uwagę na inną skalę niż na rys. 3.6.

Oczywiście, każdy ruch jest inny, a ruch *jednostajny* i *jednostajnie przyspieszony* to tylko uproszczone modele. I tak na przykład ciała spadają ruchem jednostajnie przyspieszonym jedynie w warunkach braku oporu powietrza. Skoczek na spadochronie porusza się ruchem (prawie dokładnie) jednostajnie przyspieszonym, dopóki nie otworzy spadochronu. Później, ze spadochronem otwartym, porusza się (prawie dokładnie) ruchem jednostajnym.



Fot. 3.13. a) Krzywa wieża w Pizie – wysoka na 55 metrów, przekrzywiła się już w trakcie budowy, w XII wieku; Galileusz mógł więc badać ruch spadających z niej kamieni; b) spadanie ciał w rurce opróżnionej z powietrza – gwóźdź i piórko spadają w tym samym czasie

Galileusz, profesor matematyki w Pizie, zauważył jeszcze inną cechę ruchu jednostajnie przyspieszonego. Ale zanim o tym opowiemy, zastanówmy się, jak zmienia się prędkość i jaką drogę (w określonym czasie) przebywa ciało poruszające się ruchem jednostajnie przyspieszonym.



Fot. 3.13. c) Kulka poruszająca się po poziomym stole to przykład ruchu jednostajnego; kulka staczająca się po równi to przykład ruchu jednostajnie przyspieszonego

3.6. Prędkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym

Zależność prędkości od czasu w szczególnym przypadku ruchu jednostajnie przyspieszonego, jakim jest spadek swobodny, przedstawiliśmy już na rysunku 3.12. Ogólnie ten wykres może być nieco inny. Wzór (3.6.) definiujący przyspieszenie pozwala nam znaleźć prędkość v(t) w danym momencie czasu t. Zapiszmy ten wzór nieco inaczej:

$$a = \frac{\mathrm{v}(t) - \mathrm{v}_0}{t}.$$

gdzie prędkość końcową v_k zastąpiliśmy przez v(t), tj. prędkość w chwili t.

Przekształcając ten ostatni wzór, otrzymujemy $\mathrm{v}(t) - \mathrm{v}_o = at$, skąd następnie

$$\boxed{\mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_0 + a \cdot t} \qquad (3.7.)\ .$$

Aby obliczyć prędkość końcową, musimy więc uwzględnić prędkość początkową. Spadek swobodny to przykład ruchu jednostajnie przyspieszonego z prędkością początkową równą zeru. Ruch kamienia pionowo w dół, ale z niezerową prędkością początkową nazwiemy *rzutem* pionowym w dół.

Przykład 3.13.

Do szybu kopalni wrzucono koralik, nadając mu prędkość początkową 5 m/s. Oblicz:

1. jaką prędkość osiągnie on po jednej sekundzie?
2. jaką prędkość osiągnie po trzech sekundach?

Dane:
$\mathrm{v}_0 = 5$ m/s,
a = 10 m/s^2.

Znaleźć v(t) dla 1) t = 1 s; 2) t = 3 s.

Rozwiązanie:

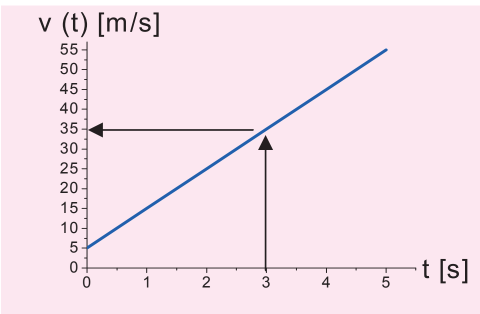
Koralik został wyrzucony w dół z prędkością początkową 5 m/s. Stosujemy wzór (3.7.):

1) $\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + at = 5 + 10 \cdot 1 = 15\ [\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$,

2) $\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + at = 5 + 10 \cdot 3 = 35\ [\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$.

Odpowiedź:

Koralik po jednej sekundzie będzie spadał z prędkością 15 m/s, a po trzech sekundach z prędkością 35 m/s, zob. rys. 3.13.



Rys. 3.13. Wykres pokazujący zależność prędkości od czasu dla koralika rzuconego w dół z prędkością początkową 5 m/s. Wykres ten przypomina wykres 3.7. b) (ale oś OY jest inna!). Strzałki pokazują sposób odczytu prędkości dla określonej chwili czasu (przykład 3.13.)

Zależność prędkości od czasu dla koralika rzuconego w dół nadal jest linią prostą, zob. rys. 3.13., ale linia ta nie przechodzi przez początek układu współrzędnych.

Przykład 3.14.

W zawodach curlingu zawodnicy puszczają specjalnie szlifowane, ciężkie kamienie po lodzie. Zakładając, że kamień zostaje wypuszczony z prędkością początkową 5 m/s, a przyspieszenie wynosi $a = -0{,}25\ \mathrm{m/s^2}$ (czyli jest to opóźnienie), obliczyć:

1. Jaką prędkość ma kamień po 4 sekundach?
2. Po ilu sekundach kamień się zatrzyma?

http://mvcurling.com/images/New_Photos/New_England_Curling_lg.jpg

Rozwiązanie:

Dane:

$v_0 = 5$ m/s,

$a = -0{,}25\ \mathrm{m/s^2}$,

t = 4 s.

Obliczenie:

Korzystamy ze wzoru (3.7.)

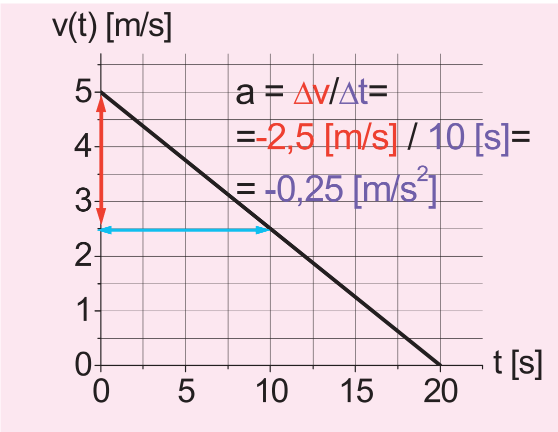
1° $v = v_0 + a \cdot t = 5 - 0{,}25 \cdot 4 = 4\ [\frac{m}{s}]$.

2° Po jakim czasie kamień się zatrzyma? Musimy wyznaczyć czas t, dla którego $v(t) = 0$:

$v = v_0 + a \cdot t = 0$,

stąd $t = -\frac{v_0}{a} = -\frac{5}{-0{,}25} = 20$ s.

Kamień zatrzyma się po 20 sekundach. Zilustrujmy ruch kamienia za pomocą wykresu $v(t)$.



Rys. 3.14 Ruch kamienia w zawodach *curlingu* – zmiana prędkości w zależności od czasu. Ruch jest przykładem ruchu jednostajnie opóźnionego. Wykresem $v(t)$ jest nadal linia prosta, ale inaczej nachylona niż w ruchu jednostajnie Przyspieszonym.
Przyspieszenie a nadal liczymy jako stosunek zmiany prędkości Δv do przedziału czasu Δt:
$a = \Delta v / \Delta t$.
Jest ono *ujemne* – ruch jest opóźniony

Przykład 3.15.

Wyrzucamy piłkę do góry z prędkością początkową 30 m/s. Po ilu sekundach osiągnie ona maksymalną wysokość (tzn. po ilu sekundach się zatrzyma)? Przyjąć wartość przyspieszenia ziemskiego $g = -10\ \mathrm{m/s^2}$ (przyjmujemy dla przyspieszenia znak minus, jako że prędkość początkowa jest skierowana do góry, a przyspieszenie w dół).

Rozwiązanie:

Jest to zadanie podobne do poprzedniego. Piłka, lecąc do góry, spowalnia. Korzystamy ze wzoru (3.7.); szukamy takiej wartości t, aby zachodził warunek $v_0 + a \cdot t = 0$,

skąd obliczamy $t = -\frac{v_0}{g} = -\frac{30}{-10} = 3$ s.

Odpowiedź: Piłka zatrzyma się po 3 sekundach.

3.7. Droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym

Wróćmy do przykładu samochodów Formuły 1 i zastanówmy się, jaką drogę przebył w czasie pierwszych dwóch sekund od startu samochód Ferrari, jeśli po tych dwóch sekundach jego prędkość wyniosła 72 km/h (czyli 20 m/s). Zadanie jest dość skomplikowane, a wynik nieco zaskakujący. Zrobimy to powoli.

1° Wyliczmy najpierw przyspieszenie a jako stosunek przyrostu prędkości do czasu, który minął od startu:

$$a = \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t} = \frac{20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\ \mathrm{s}} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

2° Jaką drogę mógł przebyć Ferrari w ciągu dwóch sekund, jeśli jego prędkość na końcu tych dwóch sekund wyniosła 20 m/s. Może 20 metrów? Chyba nie, bo startował z prędkością zerową. Jaką prędkość *średnią* mógł mieć Ferrari w *trakcie* tych dwóch sekund? Połowa wartości między prędkością początkową a końcową? Czyli średnia między 20 m/s a 0 m/s? 10 m/s? Okazuje się, że jest to nie tylko dobre oszacowanie, ale właśnie wartość dokładna[15].

3° Ile przebył samochód, jadąc 2 sekundy z prędkością średnią 10 m/s? Zgodnie z definicją prędkości średniej przebył drogę s:

$$s = \mathrm{v}_{śr} \cdot \Delta t = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 2\ \mathrm{s} = 20\ \mathrm{m}.$$

Oczywiście 20 metrów!

4° A jaką drogę przebył w czasie następnych dwóch sekund ruchu (czyli w sekundzie trzeciej i czwartej)?

Na początku tych dwóch kolejnych sekund (czyli na początku trzeciej sekundy) prędkość nie była już równa zeru, ale wynosiła 20 m/s. A na końcu tego odcinka czasu prędkość wyniosła 40 m/s. Mnożąc prędkość średnią na tym odcinku czasu (30 m/s) przez 2 s, otrzymujemy 60 m. W ciągu drugiego (dwusekundowego) odcinka czasu Ferrari przebył 60 metrów.

5° A w czasie trzeciego odcinka dwusekundowego?

Odcinek ten Ferrari zaczynał z prędkością 40 m/s, a kończył z prędkością 60 m/s. W ciągu tych dwóch sekund przebył więc 100 metrów.

6° Jeśli zsumujemy te przebyte odcinki, otrzymamy 20 + 60 + 100 = 180 metrów.

Całe rozumowanie przedstawia też rysunek 3.14.

Powtórzmy to rozumowanie w punktach:

a) w ciągu dwóch sekund jazdy (t = 2 s) Ferrari przebył 20 m,

b) w ciągu czterech sekund jazdy (t = 4 s) Ferrari przebył 80 m,

c) w ciągu sześciu sekund jazdy (t = 6 s) Ferrari przebył 180 m.

[15] Uwaga dla nauczyciela: średnią arytmetyczną między wartością początkową i końcową danego przedziału czasu można w każdym przypadku interpolacji wykorzystywać do całkowania. Jest to tzw. całkowanie metodą trapezów. W przypadku funkcji liniowej, a to właśnie jest atrybut ruchu *jednostajnie* przyspieszonego, metoda trapezów daje wartość *dokładną* całki.

Start!

Minęło sekund	0 s	1 s	2 s	3 s	4 s	5 s	6 s

Upływa sekunda	1°	2°	3°	4°	5°	6°

Odcinki 2-sekundowe	1°	2°	3°

Prędkość „v” w danej chwili

$0\ \frac{m}{s}$	$20\ \frac{m}{s}$	$40\ \frac{m}{s}$	$60\ \frac{m}{s}$

Prędkość średnia „$v_{śr}$” na odcinku czasu

1°	2°	3°
$10\ \frac{m}{s}$	$30\ \frac{m}{s}$	$50\ \frac{m}{s}$

Droga przebyta w danym odcinku czasu $s = v_{śr} \cdot t$

20 m	60 m	100 m

Cała droga przebyta w ciągu sześciu sekund 20 + 60 + 100 = **180 m**

Porównajmy ze wzorem $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot (6s)^2 = \frac{1}{2} \cdot 360\ m = 180\ m$ (dobrze!)

Rys. 3.14. Chronometraż startu Ferrari

W ruchu jednostajnie przyspieszonym przebyta droga *nie* jest proporcjonalna do czasu, który upłynął! Aby znaleźć zależność między *s* oraz *t,* podzielmy przebytą drogę przez 20 (metrów). Przebyte drogi mają się do siebie jak 1 : 4 : 9, czyli są kwadratami kolejnych liczb naturalnych. I to właśnie zauważył Galileusz. Pisał on: „jeśli w pierwszym czasie, ruszając ze stanu spoczynku, przebędzie określony odcinek, na przykład **jedną** długość lufy, w drugim czasie **trzy lufy**, w trzecim **pięć**, w czwartym **siedem**, i tak sukcesywnie w porządku kolejnych liczb nieparzystych”.

Zależność przebiegów w kolejnych sekundach ilustruje tzw. równia Galileusza, z dzwonkami ułożonymi we wzajemnych odległościach 1 : 3 : 5 : 7 : 9, zob. fot. 3.14. Dzwonki tak ułożone dzwonią w równych odstępach *czasu* (film w wersji internetowej poręcznika).

Fot. 3.14. Równia Galileusza – rekonstrukcja na UMK w Toruniu. Zauważ, że odległości między dzwonkami rosną i mają się do siebie jak kolejne liczby nieparzyste

Odległości między dzwonkami wynoszą 1; 3; 5; 7. A jaka odległość dzieli kolejne dzwonki od początku równi? To jasne! Pierwszy jest w odległości 1, drugi $1 + 3 = 4$, trzeci $1 + 3 + 5 = 9$, czwarty $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ itd. Liczby 1; 4; 9; 16 to *kwadraty* kolejnych liczb naturalnych. Sprawdźmy tę obserwację również na przykładzie Ferrari, gdzie przyspieszenie wynosiło $a = 10$ m/s²; możemy zauważyć, że wzór na przebytą drogę s jest następujący:

$$\boxed{s = \frac{1}{2} a \cdot t^2} \qquad (3.8.),$$

gdzie: t jest czasem, który upłynął od początku ruchu, a zaś jest przyspieszeniem.

Sprawdźmy wzór z danymi liczbowymi z przykładu:

Dane:
$a = 10$ m/s²,
$t = 6$ s.

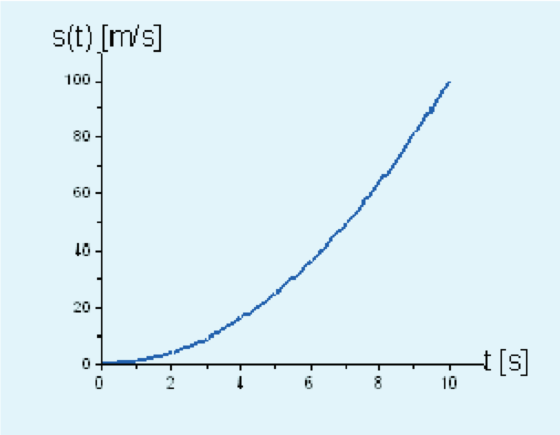
Obliczenie:

$$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (6\ \text{s})^2 = \frac{1}{2} \cdot 360\ \text{m} = 180\ \text{m}$$ **(OK!).**

W ruchu jednostajnie przyspieszonym (z zerową prędkością początkową) przebyta droga jest proporcjonalna do ***kwadratu*** czasu, jaki upłynął od startu.

Zależność graficzna drogi od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym opisana jest krzywą zwaną parabolą[16], zob. rys. 3.15. Wykres prędkości w funkcji czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym, np. rys. 3.13., jest linią prostą, a wykres drogi – parabolą. Sporządzając (lub czytając) wykres należy zawsze dokładnie opisać osie układu współrzędnych. Linia prosta na jednym wykresie (zależności drogi od czasu) opisuje ruch *jednostajny*, na innym wykresie (zależności prędkości od czasu) – ruch *jednostajnie przyspieszony*.

[16] Kształt paraboli mają na przykład antena satelitarna, zwierciadło w reflektorze samochodowym, a także trajektoria ciała rzuconego poziomo (lub ukośnie).



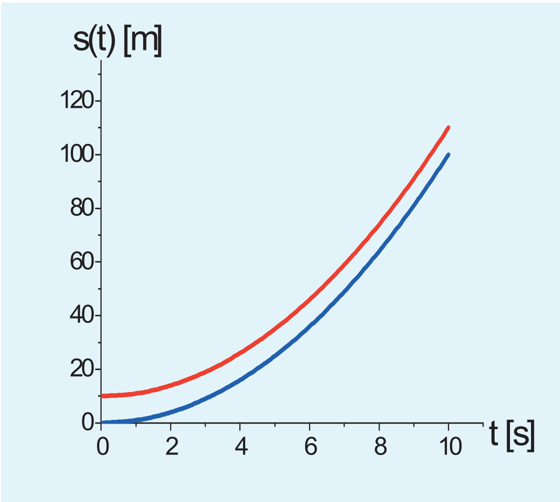
Rys. 3.15. Wykres zależności drogi od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym przedstawia krzywa zwana parabolą

Uwagi dla dociekliwych

Wzór (3.8.) stosuje się, o ile prędkość początkowa jest zerowa. Jeśli prędkość początkowa jest różna od zera, należy tę początkową prędkość uwzględnić w obliczeniach. Jak możemy wywnioskować z przykładu koralika wrzuconego do szybu kopalni, prędkość początkowa dodaje się w każdym momencie ruchu do prędkości, jaką miałoby ciało w spadku swobodnym. We wzorze na przebytą drogę musimy dodać więc składnik $v_0 t$. Jeśli dodatkowo w chwili początkowej ciało nie znajdowało się na początku skali odległości, musimy dodać tę odległość początkową s_0. Ostatecznie wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym przyjmuje postać:

$$\boxed{s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2} \qquad (3.9.)$$

Wykres zależności $s(t)$ nadal jest parabolą, ale różni się ona nieco od paraboli z rysunku 3.15. (zob. rys. 3.16.).



Rys. 3.16. Zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym z zerową prędkością początkową i zerowym przesunięciem początkowym (krzywa niebieska); zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym z niezerową prędkością początkową i niezerową przebytą odległością początkową (krzywa czerwona).

3.8. Podsumowanie

Przedstawiliśmy dwa najprostsze rodzaje ruchu – prostoliniowy ze *stałą prędkością* i prostoliniowy ze *stałym przyspieszeniem*. Zauważmy, że są one dwoma odmianami ruchu po tej samej równi – kiedy jest ona pochylona, ruch kulki jest jednostajnie przyspieszony, kiedy jest ułożona poziomo – ruch jest jednostajny. Oczywiście, oba rodzaje ruchu są pewną idealizacją prawdziwych ruchów, które nawet dla odległej sondy kosmicznej nie są ani idealnie prostoliniowe, ani nie mają stałej prędkości.

Oba przykłady pozwoliły nam jednak na zdefiniowanie prędkości jako przedziału drogi w jednostce czasu. Ta definicja, o ile wybierzemy dostatecznie krótki przedział czasu, stosuje się również do innych ruchów zmiennych. Mówimy wówczas o *prędkości chwilowej*.

Prędkość średnia zależy od prędkości chwilowych, ale dla każdego ruchu jest to inna zależność. O ile więc prędkość chwilową definiujemy z pomiaru na małych odcinkach czasu, prędkość *średnią* definiujemy na *całkowitym* odcinku czasu, który nas interesuje.

1. W ruchu *jednostajnym* prędkość jest stała, a przebyta droga jest proporcjonalna do czasu, który upłynął od początku ruchu (o ile droga początkowa wynosiła zero).

$$s = \mathrm{v}t.$$

2. Ogólnie, w ruchu prędkość nie jest stała, ale się zmienia.

Przyrost prędkości w jednostce czasu nazywamy przyspieszeniem.

W ruchu *jednostajnie przyspieszonym* przyspieszenie jest stałe, a prędkość (chwilowa) jest proporcjonalna do czasu, który upłynął od początku ruchu (o ile prędkość początkowa wynosiła zero).

Przebyta droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym zmienia się proporcjonalnie do kwadratu czasu, który upłynął od początku ruchu (o ile droga i prędkość początkowa wynosiły zero):

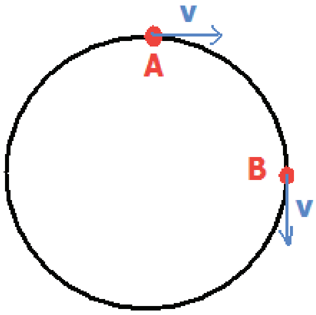
$$s = \tfrac{1}{2}\, at^2.$$

Przyspieszenie samochodu, jak widać z podanych na początku tego rozdziału przykładów, zależy zarówno od mocy silnika, jak i od masy całkowitej pojazdu. W Formule 1 samochody mają silniki o ogromnej mocy (780 CV, tzw. koni mechanicznych, czyli 570 kW) dla modelu ferrari 248F1 z 2006 roku, ale ważą znacznie mniej niż przeciętne samochody osobowe (nieco ponad 500 kg). Dlaczego? O tym nieco dalej, w dziale fizyki zwanym nauką o siłach, czyli *dynamiką*.

Dodatek 3.9 Ruch jednostajny po okręgu[17]

Do tej pory poznałeś ruchy odbywające się po torze prostoliniowym. Przykładem ruchu krzywoliniowego jest ruch po okręgu. Z pewnością potrafisz wymienić kilka. Oto przykłady takiego ruchu: konik na karuzeli, pasażerowie „diabelskiego koła” w wesołym miasteczku, wskazówki zegara i (z dużym przybliżeniem) ruch planet dookoła Słońca.

Mówiąc ruch jednostajny po okręgu, mamy na myśli ruch, w którym wartość (ale tylko wartość) prędkości się nie zmienia. Natomiast w czasie trwania ruchu zmienia się kierunek prędkości.



Rys. 3.17. W ruchu jednostajnym po okręgu wartość prędkości pozostaje stała, ale zmienia się jej kierunek

Przykład 3.16.

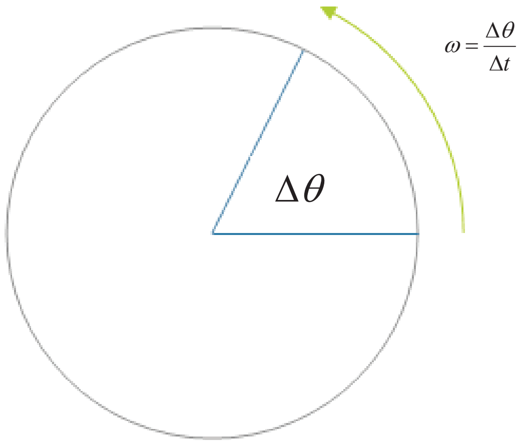
Karuzela kręci się ruchem jednostajnym. Który konik – ten od zewnątrz, czy ten wewnątrz w tym samym czasie zatacza większą drogę?

Fot. 3.15. Karuzela z konikami

Oczywiście ten, który porusza się po większym *okręgu.* Ale odpowiedź na pytanie, który konik porusza się „szybciej”, nie jest taka prosta.

[17] Uwaga dla nauczyciela: ruchu po okręgu nie ma w programie szkolnym. Piszemy o nim z trzech względów. Po pierwsze, ruch po okręgu (formalnie ruch *przyspieszony*) jest dobrym przykładem praktycznym ruchu ze *stałą* wartością prędkości (nie jest łatwo znaleźć przykłady ruchu *prostoliniowego* ze stałą prędkością). Po drugie, ruch po okręgu w astronomii, a szczególnie jego stała wartość fascynowała uczonych od Arystotelesa do Newtona. Mikołaj Kopernik pisał: „Ruch ciał niebieskich jest jednostajny, kołowy, nieustający albo z kołowych ruchów złożony”. Trzecia zaś uwaga dotyczy dynamiki: ruch po okręgu, np. ciał niebieskich, może być jednostajny, mimo że działa siła grawitacji, ale jest ona prostopadła do trajektorii, więc praca tej siły jest zerowa.

Oba koniki zataczają *pełen* okrąg w tym samym czasie, choć zewnętrzny konik pokonuje w tym samym czasie większą *drogę*. Powiemy, że oba koniki, zewnętrzny i wewnętrzny zataczają w tym samym czasie takie same *kąty*. Do opisu ruchu po okręgu służą więc dwa pojęcia: prędkości liniowej i prędkości kątowej.



Rys. 3.18. Zatoczony kąt w ruchu jednostajnym po okręgu

Prędkość **liniowa**, jak już wiemy, związana jest z przebytą odległością (mierzoną w metrach lub kilometrach) w jednostce czasu. Konik znajdujący się dalej od środka karuzeli, czyli zewnętrzny, przebywa większą drogę niż konik wewnętrzny w tym samym czasie. Stąd wniosek, że prędkość liniowa konika zewnętrznego jest większa niż wewnętrznego. Każdy z nich porusza się ruchem jednostajnym po okręgu, ale z różnymi prędkościami liniowymi.

Prędkość **kątowa** dotyczy liczby obrotów w jednostce czasu. Oba koniki wykonują tyle samo obrotów w tym samym czasie, więc ich prędkości kątowe są sobie równe. Prędkość kątową mierzymy w stopniach (kątowych) na sekundę lub innych podobnych jednostkach.

Możemy też definiować liczbę obrotów w jednostce czasu (obrotomierz na tablicy wskaźników samochodu to właśnie pokazuje w jednostce „obroty na minutę”). Czasem wielkość tę nazywamy też „częstotliwością”. Częstotliwość prądu zmiennego w sieci elektrycznej, 50 Hz w Europie i 60 Hz w USA, oznacza, że prądnica w elektrowni wykonuje 50 (lub 60 w USA) pełnych obrotów na sekundę.

Obie prędkości, kątowa i liniowa, są ze sobą ściśle powiązane. Jeżeli karuzela wykonywać będzie więcej obrotów w czasie np. jednej minuty, to wzrośnie jej prędkość kątowa. Równocześnie zwiększy się prędkość liniowa każdego z koników. Dwukrotny wzrost prędkości kątowej przyczynia się do dwukrotnego wzrostu prędkości liniowej. Prędkość kątowa i prędkość liniowa są proporcjonalne.

Z drugiej zaś strony dla ustalonej prędkości kątowej prędkość liniowa określonego konika na karuzeli zależy od jego odległości od osi obrotu. Między prędkością liniową a kątową zachodzi związek

$$\boxed{\mathrm{v} = \omega \cdot r} \qquad (3.10),$$

gdzie: ω jest prędkością kątową, a *r* odległością od osi obrotu[18].

---

[18] Uważny czytelnik stwierdzi, że we wzorze tym „nie zgadzają się” jednostki miar. Aby z prędkości kątowej ω obliczyć prędkość liniową w m/s, ta pierwsza powinna być podana w jednostkach 1/s, a nie w °/s. Sam kąt powinien być więc jednostką bezwymiarową. Taką jednostką jest tzw. miara łukowa kąta, wyrażona w radianach. Wzór (3.10.) podajemy więc jedynie jako wskazówkę, od czego zależy prędkość v w ruchu po okręgu.

Przykład 3.17.

Z jaką prędkością liniową porusza się koniec skrzydła elektrowni wiatrowej, jeśli to skrzydło zatacza 1 obrót na 5 sekund i ma długość 20 m? Ile wynosi prędkość kątowa tego skrzydła?

Rozwiązanie:

Dane:

$r = 5$ m,

$f = \dfrac{1\ obrót}{5s}$ (częstotliwość).

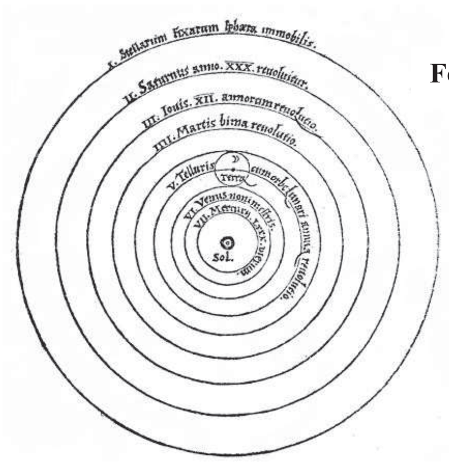
Jeśli skrzydło zatacza pełny obrót, to jego koniec zatacza drogę równą obwodowi koła o promieniu 20 m. Ta droga s wynosi:

$s = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 = 125{,}6$ m.

Prędkość końca wiatraka wynosi $\mathrm{v} = \dfrac{s}{t} = \dfrac{125{,}6}{5} = 25\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Prędkość kątowa skrzydła wynosi $\omega = \dfrac{360^{\mathrm{O}}}{5\ s} = \dfrac{72^{\mathrm{O}}}{s}$.

Fot. 3.16. Pojedyncze skrzydło wiatraka (elektrowni wiatrowej) ma długość 20 metrów, a nawet więcej. Skrzydło zamontowane na wiatraku porusza się z małą prędkością kątową, ale jego koniec z dużą prędkością *liniową*



Fot. 3.17. Układ Słoneczny wg. Kopernika.

Już Kopernik zauważył, że im dalej od Słońca planeta, tym wolniej się porusza. Na rysunku w swej pracy *O obrotach ciał niebieskich* zaznaczył „Jupiter zatacza (okrąg) w XII lat; Saturn zatacza (okrąg) w XXX lat”. Nie są to więc skrzydła żadnego kosmicznego wiatraka. Johannes Kepler (1571–1630) nadał tej obserwacji zależność matematyczną, a Izaak Newton wyjaśnił tę zależność, opierając się na prawie powszechnej grawitacji.

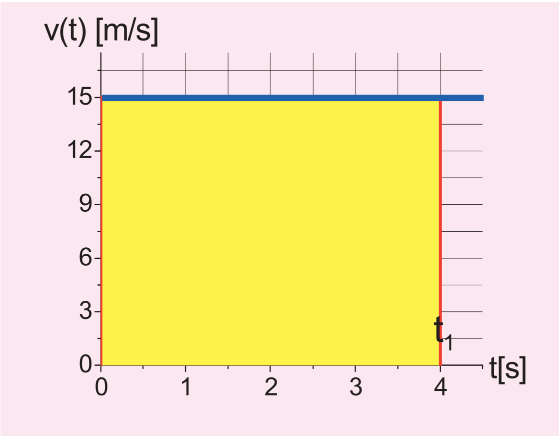
Dodatek 3.10. Więcej o wykresach zależności czasowych w ruchu

Wykresy zależności prędkości od czasu w ruchu jednostajnym i jednostajnie przyspieszonym kryją w sobie niespodzianki, które będą bardzo ważne w zaawansowanych rozważaniach nad funkcjami i ich wykresami, nie tylko w fizyce i w matematyce, ale i w ekonomii, biologii, statystyce. Poświęcimy więc im trochę uwagi.

Przypomnijmy najprostszą zależność drogi od prędkości, tę dla ruchu ze stałą prędkością v:

$$s = \mathrm{v} \cdot t_1,$$

gdzie: t_1 jest czasem ruchu. Wykres drogi w zależności od czasu jest linią prostą, przechodzącą przez początek układu współrzędnych, jak na rysunku 3.6. Narysujmy, dla porównania, wykres prędkości od czasu. Ponieważ ruch jest jednostajny, czyli o stałej prędkości, wykres też jest linią prostą, ale równoległą do osi OX.



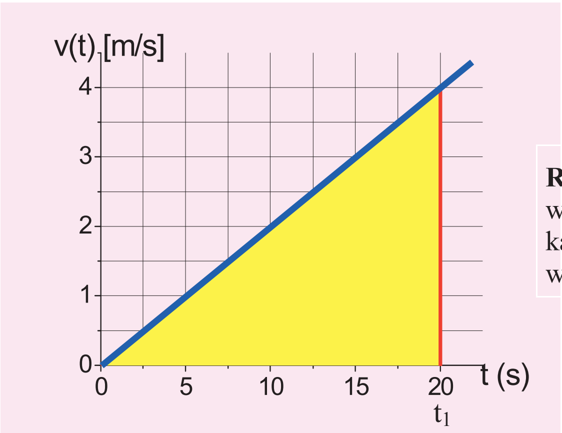
Rys. 3.19. Wykres zależności *prędkości* od czasu w ruchu *jednostajnym* (linia niebieska). Pole pod wykresem jest równe przebytej drodze od początku ruchu do określonego momentu (np. $t = 4$ s)

Z drugiej strony iloczyn $\mathrm{v} \cdot t_1$ jest polem prostokąta (zaznaczonego na żółto) na rysunku 3.19.

Rozważmy z kolei przypadek ruchu jednostajnie przyspieszonego. W ruchu tym prędkość rośnie z czasem, zgodnie ze wzorem:

$$\mathrm{v} = a \cdot t_1$$

(o ile prędkość początkowa wynosi zero). Na wykresie przedstawia się to następująco:



Rys. 3.20. Wykres zależności prędkości od czasu w ruchu *jednostajnie przyspieszonym* (linia niebieska). Pole pod wykresem jest równe przebytej drodze w czasie t_1

Co przedstawia pole pod wykresem v(t)? Jest to trójkąt, o podstawie t_1. Wysokość tego trójkąta jest równa prędkości końcowej ruchu, po czasie t_1, czyli

$$\mathrm{v}_k = a \cdot t_1.$$

Pole trójkąta wynosi więc

$$\boxed{P = \frac{1}{2}\mathrm{v}_\mathrm{k} \cdot t_1 = \frac{1}{2}(a \cdot t_1) \cdot t_1 = \frac{1}{2}at_1^2} \qquad (3.11.)$$

Porównajmy ten wynik ze wzorem (3.8.). Wyrażenia po prawych stronach obu wzorów są identyczne! Pole pod wykresem funkcji v(t) jest równoważne drodze przebytej w czasie t.

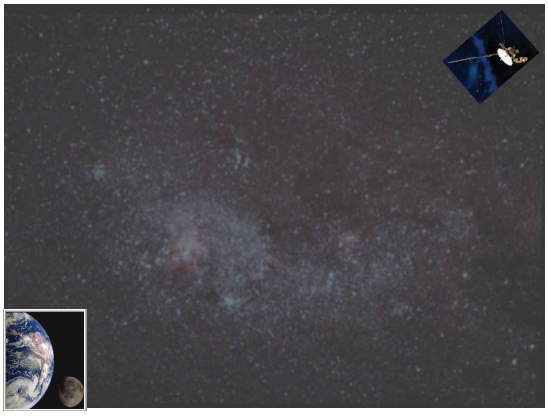
Uzyskany na rysunku 3.20. wynik jest bardzo ważny. Jeżeli jakaś wielkość (na przykład prędkość v) jest związana z inną (na przykład z drogą s) zależnością jak we wzorze (3.1.)

$$\mathrm{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

to pole pod wykresem funkcji v(t) jest równe wartości funkcji s(t) w momencie t[19].

Okazuje się więc, że różne sposoby opisu ruchu – za pomocą przyspieszenia, prędkości czy drogi są w dużej mierze równoważne. Istnieją sposoby (matematyczne) przejścia od jednego opisu do drugiego. Fizyczną przyczyną różnic między ruchem jednostajnym a jednostajnie przyspieszonym jest istnienie sił. Kiedy siły te równoważą się, ruch jest jednostajny. Kiedy się *nie* równoważą, a sumaryczna siła pozostaje stała, ruch jest jednostajnie przyspieszony. Dwa opisy – matematyczny i fizyczny uzupełniają się. Definicja pojęcia siły doprowadzi nas do odkrycia nowych pojęć – energii, pracy, pędu. To wszystko w następnych rozdziałach.

Znajomość nie tylko *matematycznych* zależności dla ruchu, ale i *przyczyn* ruchu pozwoliła nam w XX wieku na loty samolotem i statkami kosmicznymi. Starożytni Egipcjanie, dzięki stuleciom obserwacji ruchu Księżyca i planet potrafili przewidzieć zaćmienia Słońca. Dziś potrafimy wysłać sondy kosmiczne w najodleglejsze zakątki Układu Słonecznego, tak aby przeleciały tam, gdzie chcemy.



Fot. 3.18. Sonda Voyager oddalająca się od Ziemi

Dwie sondy Voyager, wysłane w 1977 roku, przeleciały koło Jowisza i jego księżyca Io, później Saturna i jego księżyca Tytana, Urana i Neptuna, a teraz przemierzają prawie pustą przestrzeń kosmiczną na granicach Układu Słonecznego. Dziś (w 2009 roku) sonda Viking 1 znajduje się 17 miliardów km od Ziemi i leci z prędkością 520 milionów km na rok[20] (czyli 50 tysięcy km na godzinę!). Porusza się po trajektorii będącej bardzo wydłużoną hiperbolą, praktycznie po linii prostej.

---

[19] Funkcja v(t) jest nazywana *pochodną* funkcji s(t), a funkcja s(t) jest nazywana *całką* funkcji v(t). Ale to już bardzo zaawansowany dział matematyki, zwany rachunkiem różniczkowym (stworzył go też Newton)!

[20] Voyager, The Interstellar Mission, JET Propulsion Laboratory, California, http://voyager.jpl.nasa.gov/science/planetary.html