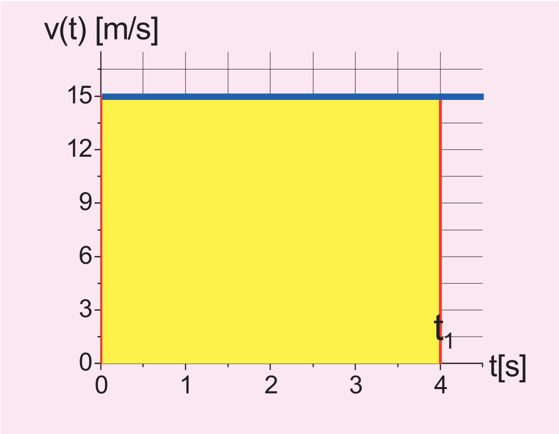
Dodatek 3.10. Więcej o wykresach zależności czasowych w ruchu

Wykresy zależności prędkości od czasu w ruchu jednostajnym i jednostajnie przyspieszonym kryją w sobie niespodzianki, które będą bardzo ważne w zaawansowanych rozważaniach nad funkcjami i ich wykresami, nie tylko w fizyce i w matematyce, ale i w ekonomii, biologii, statystyce. Poświęcimy więc im trochę uwagi.

Przypomnijmy najprostszą zależność drogi od prędkości, tę dla ruchu ze stałą prędkością v:

$$s = \mathrm{v} \cdot t_1,$$

gdzie: t_1 jest czasem ruchu. Wykres drogi w zależności od czasu jest linią prostą, przechodzącą przez początek układu współrzędnych, jak na rysunku 3.6. Narysujmy, dla porównania, wykres prędkości od czasu. Ponieważ ruch jest jednostajny, czyli o stałej prędkości, wykres też jest linią prostą, ale równoległą do osi OX.



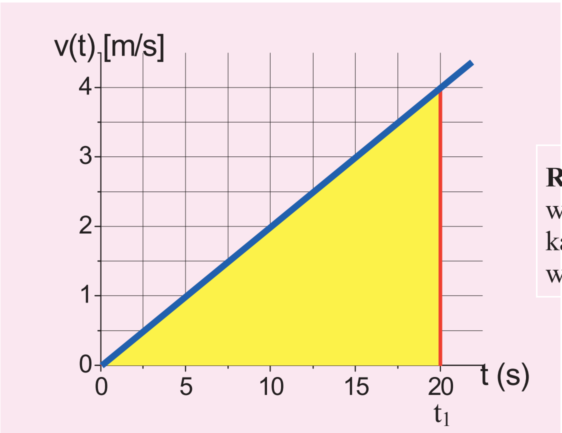
Rys. 3.19. Wykres zależności *prędkości* od czasu w ruchu *jednostajnym* (linia niebieska). Pole pod wykresem jest równe przebytej drodze od początku ruchu do określonego momentu (np. $t = 4$ s)

Z drugiej strony iloczyn v · t_1 jest polem prostokąta (zaznaczonego na żółto) na rysunku 3.19.

Rozważmy z kolei przypadek ruchu jednostajnie przyspieszonego. W ruchu tym prędkość rośnie z czasem, zgodnie ze wzorem:

$$\mathrm{v} = a \cdot t_1$$

(o ile prędkość początkowa wynosi zero). Na wykresie przedstawia się to następująco:



Rys. 3.20. Wykres zależności prędkości od czasu w ruchu *jednostajnie przyspieszonym* (linia niebieska). Pole pod wykresem jest równe przebytej drodze w czasie t_1

Co przedstawia pole pod wykresem v(t)? Jest to trójkąt, o podstawie t_1. Wysokość tego trójkąta jest równa prędkości końcowej ruchu, po czasie t_1, czyli

$$\mathrm{v}_k = a \cdot t_1.$$

Pole trójkąta wynosi więc

$$\boxed{P = \frac{1}{2}\mathrm{v}_\mathrm{k} \cdot t_1 = \frac{1}{2}(a \cdot t_1) \cdot t_1 = \frac{1}{2}at_1^2} \qquad (3.11.)$$

Porównajmy ten wynik ze wzorem (3.8.). Wyrażenia po prawych stronach obu wzorów są identyczne! Pole pod wykresem funkcji v(t) jest równoważne drodze przebytej w czasie t.

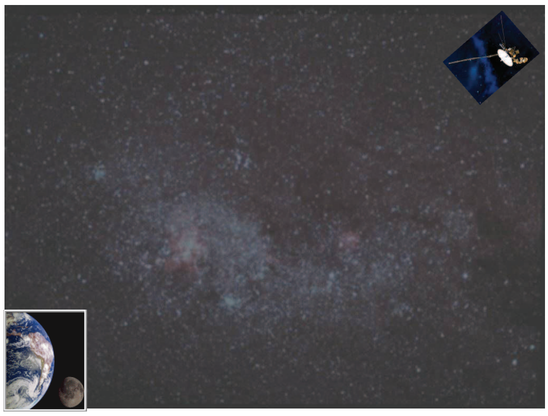
Uzyskany na rysunku 3.20. wynik jest bardzo ważny. Jeżeli jakaś wielkość (na przykład prędkość v) jest związana z inną (na przykład z drogą s) zależnością jak we wzorze (3.1.)

$$\mathrm{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

to pole pod wykresem funkcji v(t) jest równe wartości funkcji $s(t)$ w momencie t[19].

Okazuje się więc, że różne sposoby opisu ruchu – za pomocą przyspieszenia, prędkości czy drogi są w dużej mierze równoważne. Istnieją sposoby (matematyczne) przejścia od jednego opisu do drugiego. Fizyczną przyczyną różnic między ruchem jednostajnym a jednostajnie przyspieszonym jest istnienie sił. Kiedy siły te równoważą się, ruch jest jednostajny. Kiedy się *nie* równoważą, a sumaryczna siła pozostaje stała, ruch jest jednostajnie przyspieszony. Dwa opisy – matematyczny i fizyczny uzupełniają się. Definicja pojęcia siły doprowadzi nas do odkrycia nowych pojęć – energii, pracy, pędu. To wszystko w następnych rozdziałach.

Znajomość nie tylko *matematycznych* zależności dla ruchu, ale i *przyczyn* ruchu pozwoliła nam w XX wieku na loty samolotem i statkami kosmicznymi. Starożytni Egipcjanie, dzięki stuleciom obserwacji ruchu Księżyca i planet potrafili przewidzieć zaćmienia Słońca. Dziś potrafimy wysłać sondy kosmiczne w najodleglejsze zakątki Układu Słonecznego, tak aby przeleciały tam, gdzie chcemy.



Fot. 3.18. Sonda Voyager oddalająca się od Ziemi

Dwie sondy Voyager, wysłane w 1977 roku, przeleciały koło Jowisza i jego księżyca Io, później Saturna i jego księżyca Tytana, Urana i Neptuna, a teraz przemierzają prawie pustą przestrzeń kosmiczną na granicach Układu Słonecznego. Dziś (w 2009 roku) sonda Viking 1 znajduje się 17 miliardów km od Ziemi i leci z prędkością 520 milionów km na rok[20] (czyli 50 tysięcy km na godzinę!). Porusza się po trajektorii będącej bardzo wydłużoną hiperbolą, praktycznie po linii prostej.

[19] Funkcja v(t) jest nazywana *pochodną* funkcji $s(t)$, a funkcja $s(t)$ jest nazywana *całką* funkcji v(t). Ale to już bardzo zaawansowany dział matematyki, zwany rachunkiem różniczkowym (stworzył go też Newton)!

[20] Voyager, The Interstellar Mission, JET Propulsion Laboratory, California, http://voyager.jpl.nasa.gov/science/planetary.html