

Rozdział I. Ruch po okręgu i grawitacja

1.1. Od Mikołaja Kopernika

Dzieło Mikołaja Kopernika „O ruchach ciał niebieskich”¹ rozpoczyna się od rozważań pozornie nie na temat – o kształcie Ziemi. O tym, że Ziemia jest kulą, wiadomo było od czasów starożytnych. Erastotenes w I w p.n.e. zmierzył nawet jej promień z zadziwiająco dobrą dokładnością. Kopernik postawił jednak trudne pytanie: jak to się dzieje, że woda z kuli ziemskiej nie spływa. Odpowiada sam Kopernik, że woda zapełnia zagłębienia terenu.

Ocean [...], który oblewa ląd stały, wlewa się tu i ówdzie w jego głąb w postaci mórz i wypełnia jego bardziej zapadłe wgłębienia. Wypadało tedy, aby mniej było wód niż lądu, by woda nie pochłonęła całej ziemi, skoro oba te elementy na skutek swej *ciężkości* dążą do tego samego środka, lecz żeby pewne części lądu pozostały na wierzchu dla utrzymania bytu istot lądowych, a także liczne tu i ówdzie rozciągające się wyspy. Bo i sam kontynent wszystkich ziem czymże jest innym, jeśli nie wyspą, większą tylko od innych?

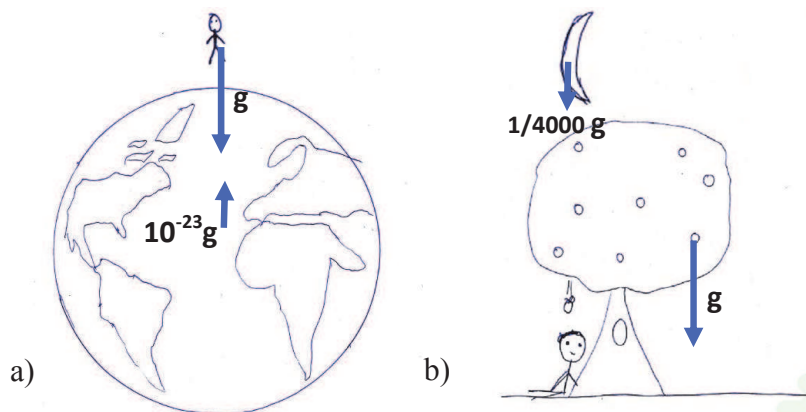
Kopernik wyraźnie mówi o *ciężkości* ciał. Dziś wiemy, że nie tylko woda ciąży w kierunku środka Ziemi, ale że wszystkie ciała posiadające *masę* przyciągają się siłami grawitacji. Oddziaływanie to ma zgodnie z III prawem Newtona charakter wzajemny: z taką samą siłą Ziemia przyciąga Kubę jak Kuba Ziemię. Gdy Kuba podskoczy nad ziemię, to Kuba spada na kulę ziemską, ale i Ziemia przyspiesza w kierunku Kuby. Przyspieszenie, z jakim spada Kuba, jest jednak znacznie większe niż przyspieszenie Ziemi w kierunku Kuby.

Decyduje o tym II prawo Newtona – przyspieszenie ciała jest wprost proporcjonalne do działającej siły a odwrotnie do jego masy

$$a = F/m,$$

gdzie a jest przyspieszeniem ciała, m jego masą a F działającą siłą.

Siła grawitacji jest taka sama dla dwóch ciał ale masa Ziemi znacznie, znacznie większa niż Kuby. Masa Ziemi wynosi $59 \cdot 10^{23}$ kg. Jeżeli masa Kuby wynosi 59 kg, to przyspieszenie kuli ziemskiej w kierunku Kuby jest 10^{-23} razy mniejsze niż Kuby w kierunku Ziemi. Z jakim przyspieszeniem spada Kuba, policzymy w następnym paragrafie.



Fot. 1.1. a) Kuba (59 kg) podskoczył nad Ziemię i spada na nią. Kuba spada na Ziemię z przyspieszeniem, które oznaczamy jako g ; kula ziemska przyspiesza w kierunku Kuby z przyspieszeniem $10^{-23}g$. b) Anegdota mówi, że Newton zrozumiał prawo grawitacji, gdy zauważył, że jabłko spada na ziemię tak samo, jak Księżyc dookoła Ziemi (ustawicznie) zakrzywia tor swojego ruchu, w kierunku Ziemi (Rysunek Kuba Garbacza lat 10)

¹ Wydrukowane dzieło Mikołaja Kopernika nosi tytuł „De revolutionibus orbium celestis” co tłumaczymy jako „O obrotach sfer niebieskich”. Nie jest jednak wykluczone, że mogło mieć ono pierwotnie inny tytuł. Praca jego ucznia Jana Retyka zapowiadająca dzieło Kopernika ma tytuł „De revelationibus ... moto” czyli o rewelacjach ruchu ciał niebieskich. Z pewnością wydawca dzieła opatrzył dzieło Kopernika nieuzgodnioną z nim przedmową, pomniejszającą znaczenie rewolucji kopernikańskiej.

1.2. Siła grawitacji

Wzór na siłę wzajemnego przyciągania grawitacyjnego między dwoma ciałami o określonych masach podał Izaak Newton dopiero prawie 200 lat po Koperniku. Wzór ten należy do jednych z najprostszych w fizyce i jest niejako pierwowzorem dwóch innych oddziaływań – elektrycznych i magnetycznych. Siła oddziaływania grawitacyjnego jest tym większa, im większa jest masa oddziaływujących ciał, a maleje z *kwadratem* ich wzajemnej odległości. Opisujemy to wzorem

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (1.1)$$

gdzie F jest siłą wzajemnego przyciągania ciał o masach M i m a r jest ich wzajemną odległością.

Stała G nazywana jest stałą grawitacji i ma podstawowe znaczenie dla budowy naszego Wszechświata. To ona decyduje o szybkości obrotów planet dookoła Słońca, gwiazd dookoła środka Galaktyki a także rozmiarach całego Wszechświata. Jeżeli siłę wyrazimy w *niutonach* (N) a odległość w metrach, to wartość tej stałej wynosi $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

Formalnie wzór (1.1) dotyczy mas, które przybliżamy jako masy punktowe. Jest to bez wątpienia zrozumiałe np. dla Ziemi i Słońca: odległość Ziemi od Słońca (ok. 150 mln km) jest znacznie większa niż promień słonecznej kuli (0,7 mln km). Ale w przypadku Kuby i Ziemi?

Pokazał to już Newton, że kula oddziałuje grawitacyjnie tak, jakby cała masa była skupiona w jej geometrycznym środku. Pisał on tym, trochę intuicyjnie, nawet Kopernik: „Ziemia krąży dookoła środka Słońca, albo punktu, który w pobliżu tego środka się znajduje”.

Znając masę Ziemi i jej promień (6370 km) możemy obliczyć, jaka siła grawitacji działa na Kubę stojącego na powierzchni Ziemi. Przyjmujemy $M = 59 \cdot 10^{23} \text{ kg}$ i $m = 59 \text{ kg}$.

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 59 \cdot 10^{23} \cdot 59 / (6370 \cdot 1000)^2 = 583 \text{ N}$$

Obliczmy, ze wzoru (1.1) przyspieszenie g , jakie działa na Kubę lub jakiegokolwiek inne ciało spadające na Ziemię w pobliżu jej powierzchni. Przypominamy, że przyspieszenie jest wprost proporcjonalne do siły a odwrotnie proporcjonalne do masy ciała

$$g = F / m = G \frac{M}{r^2} \quad (1.2)$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 59 \cdot 10^{23} / (6370 \cdot 1000)^2 = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Jest to dobrze znana wartość przyspieszenia w spadku swobodnym. Dzięki teorii grawitacji Newtona potrafimy tę wielkość nie tylko zmierzyć, ale i wyliczyć².

Przyspieszenie g , z jakim spadają ciała na dowolnej planecie nie zależy od masy tych ciał, ale jedynie od masy planety i jej promienia.

$$g = G \frac{M}{r^2} \quad (1.3)$$

Sprawdzili to astronauta Apollo 15 spuszczać na Księżycu młotek i piórko: spadły razem (na Księżycu nie ma oporów powietrza), ale z przyspieszeniem mniejszym niż na Ziemi³.

² A właściwie, to pomiar przyspieszenia grawitacyjnego jest sposobem na wyznaczenie masy Ziemi.

³ Film ze statku Apollo pokazujemy na stornie internetowej ZDF UMK.

Przykład 1.1

Oblicz przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Marsa, przyjmując promień tej planety jako 3400 km i jej masę jako $6,42 \cdot 10^{23}$ kg.

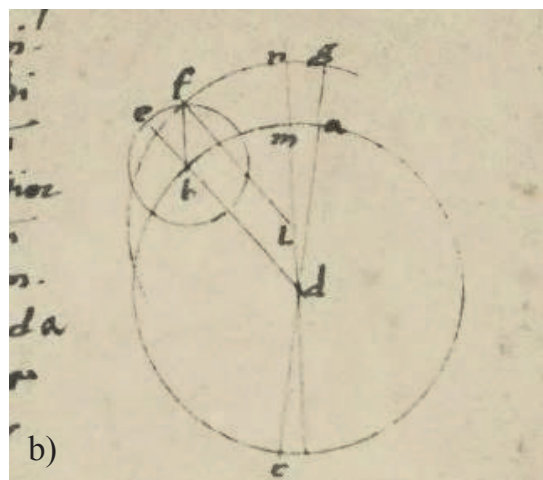
Rozwiązanie

Korzystamy z równania (1.2). Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23} / (3400 \cdot 1000)^2 = 3,69 \text{ m/s}^2$$

Ciała na Marsie „ważą” mniej niż połowę wartości ich ciężaru na Ziemi.

Prawo grawitacji wyjaśnia nie tylko spadanie jabłka na Ziemię, ale przede wszystkim ruch planet dookoła Słońca, Księżyca i sztucznych satelitów dookoła Ziemi itd. Już Kopernik wiedział (za starożytnymi uczonymi), że planety okrążają Słońce w różnym czasie: im bliżej Słońca, tym szybciej. Najbliższy Słońcu Merkury obiega Słońce w 80 dni, następna planeta, Wenus - w 9 miesięcy, Ziemia przez rok, Mars 2 lata, Jowisz – lat XII⁴ itd. Zależność jest tak oczywista, że nie może być przypadkowa. Aby, za Newtonem wyjaśnić zależności opisane przez Kopernika, musimy najpierw zrozumieć prawa ruchu po okręgu.



Rys. 1.2. a) Rysunek z 18-tej strony rękopisu dzieła Kopernika; genialny uczony zaraz na wstępie, przed zagłębieniem się w szczegóły, wyjaśnia istotę swojego odkrycia: planety krążą dookoła Słońca i im ich orbity są bliższe Słońcu, tym krótszy okres obiegu; **b)** kolejny rysunek z rękopisu Kopernika; do orbit kolistych Kopernik dodał *epicykle*, tak jakby wiedział, że orbity nie są dokładnie kołiste

Pytania kontrolne

1. Oblicz przyspieszenie „księżycowe”, tj. przyspieszenie, z jakim spadają ciała na powierzchni Księżyca. Przyjmij masę Księżyca $M = 0,73 \cdot 10^{23}$ kg i jego promień $r = 1736$ km. Wynik podaj z dokładnością do trzech cyfr znaczących. Ile razy to przyspieszenie jest mniejsze od przyspieszenia ziemskiego ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)? Obejrzyj skoki astronautów na Księżycu (film NASA) na stronie internetowej UMK.

2. Horoskopy powołują się na konfiguracje planet w momencie urodzenia się. Oblicz, z jaką siłą grawitacji działa na dziecko (o masie $m = 3,5$ kg) Saturn, o masie $M = 57 \cdot 10^{25}$ kg i oddległy od Ziemi w chwili narodzenia dziecka o 1,5 mld km a z jaką lekarka, o masie 57 kg, oddległa od dziecka o 1,5 m.

⁴ Dzisiejsze pomiary czasu obiegu planet dookoła Słońca nieco się różnią od tych podanych przez Kopernika. Powróćmy do tego zagadnienia w rozdziale IV.

1.3. Ruch po okręgu – przyspieszenie dośrodkowe

Znamy dwa szczególne, modelowe przypadki ruchu – ruch jednostajny, jak na przykład toczącej się po poziomym stole kulki i ruch jednostajnie przyspieszony, na przykład kulki staczającej się po równi pochyłej. Jeszcze innym, specjalnym rodzajem ruchu jest kamień kręcący się na sznurku ze stałą prędkością.

Atrybutem ruchu jednostajnego *prostoliniowego* jest stałość prędkości. Wiemy, że prędkość oprócz wartości ma określony kierunek. W ruchu jednostajnym prostoliniowym i wartość i *kierunek* wektora prędkości pozostają stałe. W ruchu przyspieszonym prędkość się zmienia. Zmiany prędkości w czasie nazywamy przyspieszeniem.

Przykład 1.2

Pociąg podmiejski rusza ze stacji i w ciągu 100 sekund osiąga prędkość 10 m/s (czyli 36 km/h). Jakie jest (średnie) przyspieszenie pociągu w ciągu tych 10 sekund?

Rozwiązanie

Zgodnie z definicją, przyspieszenie a jest równe ilorazowi zmiany prędkości Δv do przedziału czasu Δt , w jakim ta zmiana miała miejsce.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1.4)$$

Podstawiając wartości liczbowe uzyskujemy

$$a = \frac{100 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = 10 \text{ m/s}^2$$

Średnie przyspieszenie pociągu, czyli zmiana jego prędkości odniesiona do jednej sekundy wynosi 10 m/s w ciągu sekundy, w skrócie $a = 10 \text{ (m/s)/s}$.

Obydwa przykłady ruchu, wyżej wspomniane, dotyczą ruchu *prostoliniowego*. Jeżeli ruch nie jest prostoliniowy, to sprawy się nieco komplikują. Wynika to z tego, że prędkość (i przyspieszenie) są **wektorami**, czyli w ich opisie musimy uwzględnić *kierunek*. I tak w ruchu jednostajnym *prostoliniowym* nie tylko *wartość* prędkości jest stała ale i jej *kierunek*. W ruchu jednostajnie *przyspieszonym* prostoliniowym nie tylko *wartość* przyspieszenia jest stała, ale i *kierunek* tego przyspieszenia. Ruch po okręgu jest inny.

Szczególnym przypadkiem ruchu po okręgu jest taki ruch, w którym *wartość* prędkości pozostaje stała. Przykładem takiego ruchu jest karuzela; również w ruchu Ziemi dookoła Słońca wartość prędkości pozostaje prawie stała⁵.



Fot. 1.3. Kręcąca się karuzela lub skrzydła wiatraka przetwarzającego energię kinetyczną wiatru na energię elektryczną są dobrymi przykładami ruchu obrotowego ze stałą prędkością.

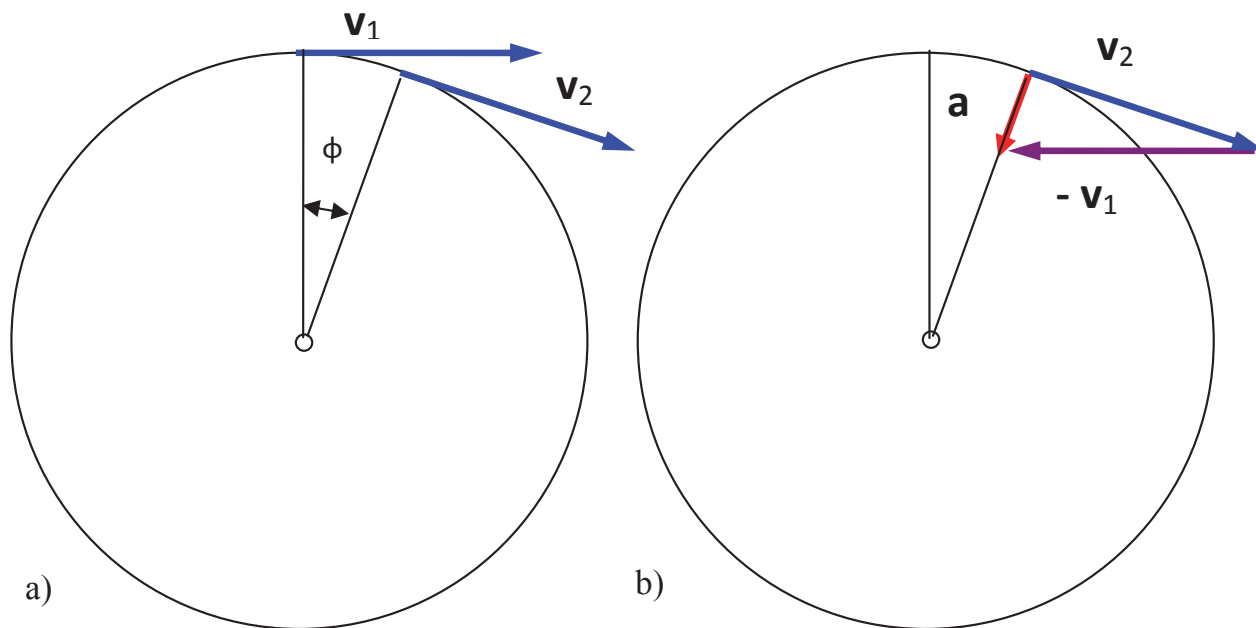
⁵ Ruch Marsa dookoła Słońca nie jest już tak dobrym przykładem ruchu jednostajnego po okręgu jak ruch Ziemi.

Stała wartość prędkości nie oznacza jednak, że w ruchu po okręgu nie występuje przyspieszenie. Aby się o tym przekonać, musimy odwołać się do dokładniejszej definicji przyspieszenia niż w równaniu (1.4). Definicja ta musi uwzględniać fakt, że prędkość jest wektorem. Formalnie, dokładną definicję przyspieszenia możemy zapisać jako

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (1.5)$$

W powyższym równaniu pogrubiona czcionka $\mathbf{v}$ i $\mathbf{a}$ oznaczają, że te dwie wielkości są wektorami (czas t – nie jest wektorem).

Formalny zapis jak w równaniu (1.5) nie daje prostej recepty na obliczenie przyspieszenia⁶. Spróbujmy zastanowić się, ile wynosi przyspieszenie w ruchu *jednostajnym*⁷ po okręgu. Skorzystamy w tym celu z rysunku 1.4.



Rys. 1.4. a) Aby znaleźć przyspieszenie w ruchu jednostajnym po okręgu badamy, jak wygląda wektor prędkości $\mathbf{v}_1$ w określonej chwili a jak wygląda ten sam wektor (teraz narysowany jako $\mathbf{v}_2$) po upływie czasu Δt ; **b)** przyspieszenie znajdujemy z różnicy wektorów $(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$; w tym celu do wektora $\mathbf{v}_2$ dodajemy wektor $(-\mathbf{v}_1)$; różnica tych wektorów jest skierowana ku środkowi okręgu: przyspieszenie ciała poruszającego się jednostajnie po okręgu jest przyspieszeniem *dośrodkowym*.

Jak widać z rys. 1.4 prędkość ciała w ruchu po okręgu jest w każdym punkcie prostopadła do promienia tego okręgu: w poszczególnych momentach czasu kierunek tej prędkości się zmienia. Jeżeli w pewnej chwili prędkość ta wynosi $\mathbf{v}_1$ to po czasie Δt prędkość będzie miała kierunek wektora $\mathbf{v}_2$. Przyrost prędkości $\Delta \mathbf{v}$ jest równy $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 + (-\mathbf{v}_1)$. Wektor $\Delta \mathbf{v}$ jest skierowany do *środku* okręgu, zob. rys. 1.4. Jeżeli obliczymy przyspieszenie $\mathbf{a}$ jako stosunek $\mathbf{a} = \Delta \mathbf{v} / \Delta t$, to jest ono również skierowane ku środkowi okręgu. Dochodzimy do bardzo ważnego wniosku.

W ruchu jednostajnym po okręgu przyspieszenie ciała jest skierowane ku środkowi okręgu. Przyspieszenie to nazywamy przyspieszeniem *dośrodkowym*.

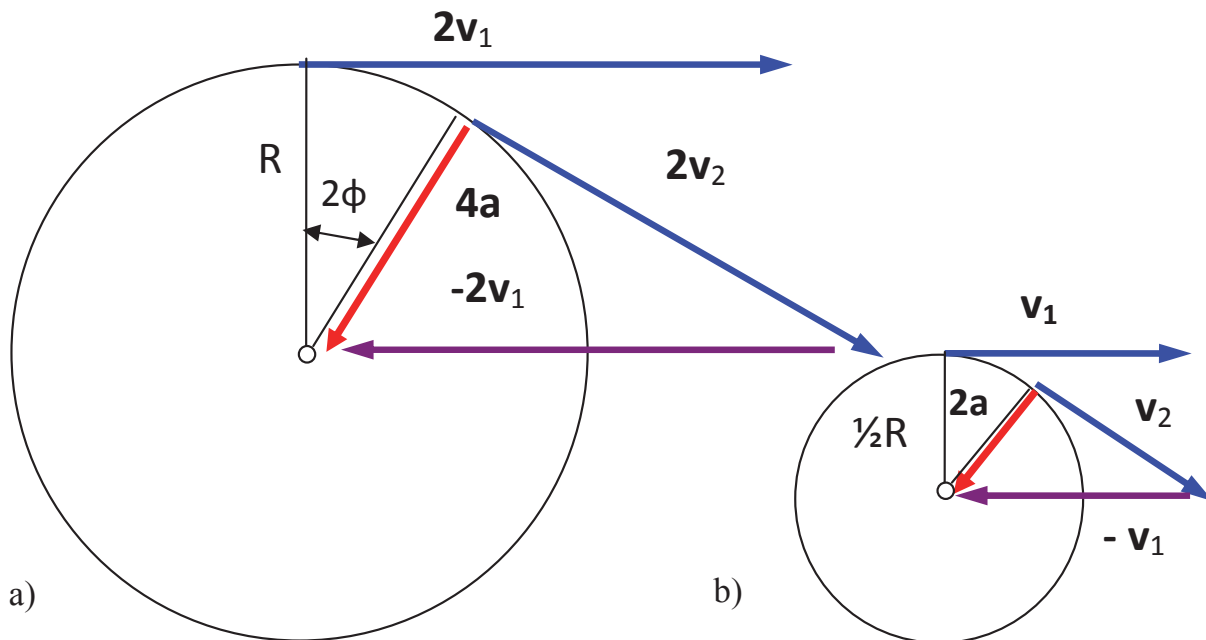
Od czego zależy przyspieszenie dośrodkowe? Na pewno od prędkości ruchu, ale nie tylko. Posłużymy się w tym celu kolejnym rysunkiem. Zbadamy, jak zmienia się przyspieszenie dośrodkowe, gdy zmienia się prędkość ruchu i gdy zmienia się promień okręgu, zob. rys. 1.5.

⁶ Nie martw się, nawet studenci mają z tym kłopot! (Różniczkowanie wektorów wymaga wzorów Poissona.)

⁷ Ruch po okręgu, w którym wartość prędkości pozostaje stała, będziemy nazywać ruchem „jednostajnym po okręgu”.

Podwojenie prędkości, zob. 1.5⁸ powoduje, że w tym samym czasie kąt zataczany przez poruszające się ciało podwaja się. Jednocześnie długość wektora prędkości podwaja się. Przyspieszenie rośnie więc czterokrotnie.

Ogólnie, przyspieszenie dośrodkowe rośnie jak kwadrat prędkości. Pokonywanie zakrętów z większą prędkością niż na to pozwalają znaki drogowe jest zatem bardzo niebezpieczne. Przykładowo, pokonanie zakrętu z prędkością 100 km/h zamiast zalecanej 70 km/h powoduje ponad dwukrotne zwiększenie przyspieszenia dośrodkowego (a przez to ryzyko „wypadnięcia” samochodu z drogi, szczególnie na mokrej szosie).



Rys. 1.5. Przyspieszenie dośrodkowe zależy od prędkości i promienia okręgu R ; **a)** podwojenie prędkości powoduje czterokrotny wzrost przyspieszenia - w tym samym czasie ciało zatacza dwukrotnie większy kąt; **b)** zmniejszenie promienia okręgu do $\frac{1}{2}R$ powoduje podwojenie przyspieszenia. Rysunek ma charakter przybliżony.

Zmniejszenie o połowę promienia okręgu, przy tej samej wartości prędkości, powoduje podwojenie zatoczonego kąta w jednostce czasu. Przyspieszenie, zob. czerwony wektor na rys. 1.5b. rośnie więc dwukrotnie. Im mniejszy promień okręgu, tym większe przyspieszenie dośrodkowe poruszającego się ciała. Z tego powodu kierowcy Formuły 1 „ścinają” zakręty – pokonują je nie po okręgu o wyznaczonym, małym promieniu ale o promieniu tak dużym, jak na to pozwala szerokość toru. Na zwykłej szosie byłoby to śmiertelnie niebezpieczne!

Bardzo ważna zależność na przyspieszenie dośrodkowe a w ruchu jednostajnym po okręgu wyraża się więc wzorem

$$a = \frac{v^2}{R}, \quad (1.6)$$

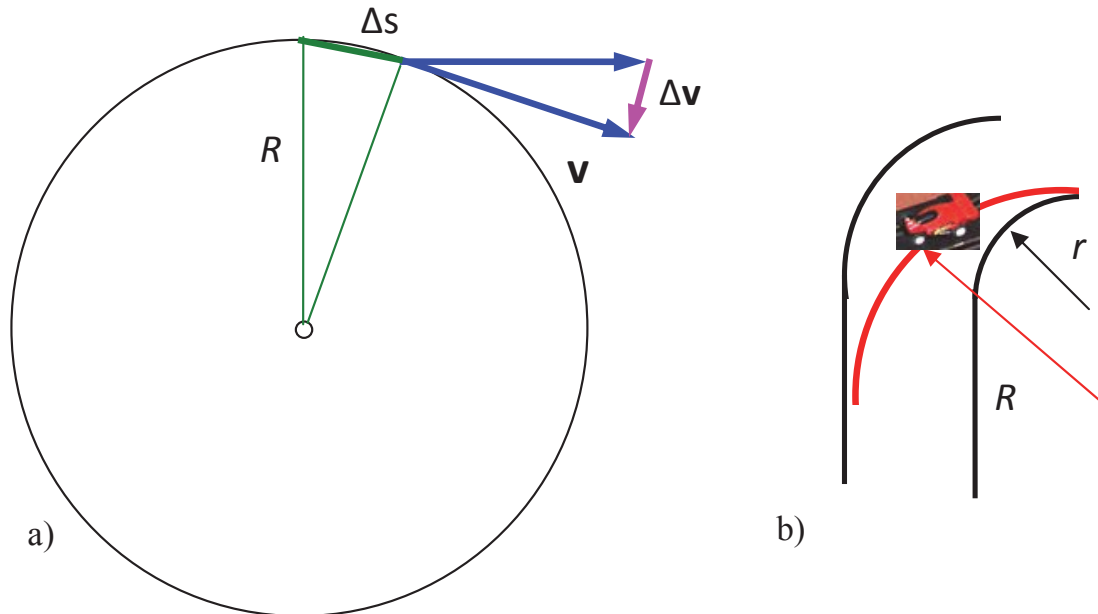
gdzie v jest prędkością (liniową) ruchu po okręgu a R promieniem okręgu.

Przyspieszenie dośrodkowe nie zależy w szczególności od masy ciała. Podobnie jak to ze spadkiem swobodnym i tarcie, *ryzyko* wypadnięcia z drogi samochodu osobowego i ciężarowego jest takie samo, o ile pokonują one zakręt z tą samą prędkością.

⁸ Rysunek 1.5 jest z konieczności niedokładny. Dla obliczenia przyspieszenia powinniśmy rozważać małe kąty a kąty przedstawione na rysunku takimi nie są. Siłą rzeczy boki trójkątów prędkości „rozchodzą się”.

Wyprowadzenie wzoru (1.6) - fakultatywne

Dokładne wyprowadzenie wzoru (1.6) wymaga (prostych) rozważań geometrycznych i jest przedstawione na rysunku 1.6. Droga Δs przebyta w jednostce czasu Δt wynosi $\Delta s = v\Delta t$ i jest wycinkiem okręgu. Dla małych Δt możemy ją przybliżyć za pomocą odcinka linii prostej.



Rys. 1.6. Przyspieszenie dośrodkowe w ruchu jednostajnym po okręgu. **a)** Wyprowadzenie wzoru $a = v^2/R$: trójkąt utworzony przez dwa promienie R i odcinek drogi Δs (zielony) jest podobny do trójkąta prędkości (wektory niebieskie) – stąd $\Delta s/R = \Delta v/v$; podstawiając $\Delta s = v\Delta t$ przekształcamy $\Delta v/\Delta t = v^2/R = a$; **b)** kierowca Formuły 1 „ścina” zakręt – w ten sposób promień R , po którym się porusza, jest większy niż promień zakrętu r i przy pokonywaniu zakrętu występuje mniejsze przyspieszenie dośrodkowe (innymi słowy, można pokonać zakręt z większą prędkością).

Trójkąt utworzony przez dwa promienie R i odcinek Δs (zaznaczony kolorem zielonym na rys. 1.6) i trójkąt utworzony przez wektory prędkości są podobne, więc stosunki długości odpowiednich boków są takie same. Wynika stąd związek

$$\frac{v\Delta t}{R} = \frac{\Delta v}{v} \quad (1.7)$$

Przekształcając ten wzór otrzymujemy

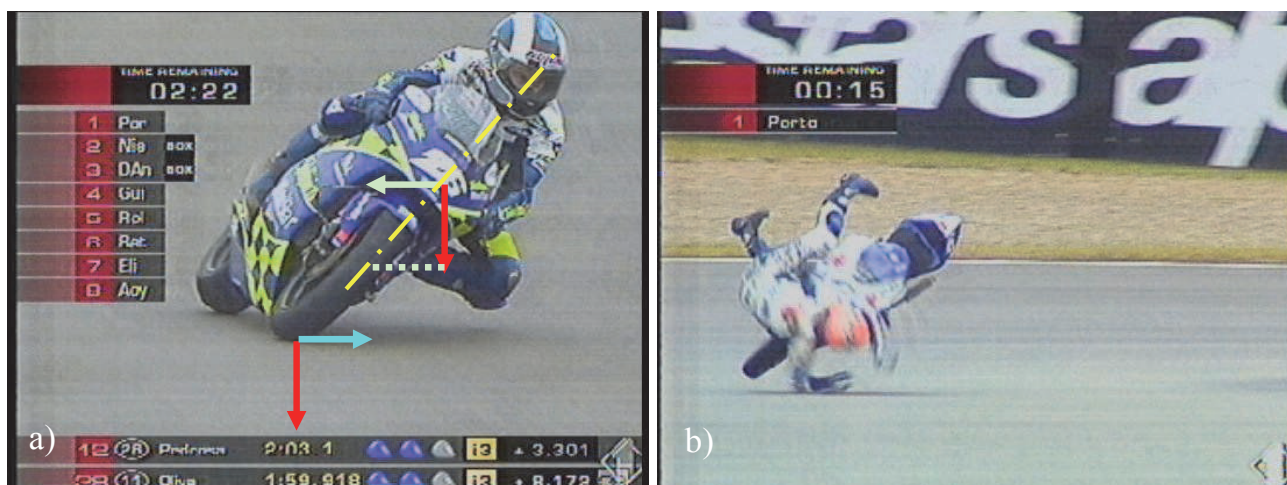
$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \quad (1.8)$$

czyli poszukiwany wzór na przyspieszenie $a = \frac{v^2}{R}$. Nie zapisujemy w tym wzorze przyspieszenia jako wektora, mimo że nim jest, gdyż pamiętamy, że wektor a jest prostopadły w każdym momencie do wektora v (i do trajektorii ruchu).

Jest to niezwykle ważna właściwość ruchu jednostajnego po okręgu. Z tej prostopadłości wynika, że planety nie spadają na Słońce a poruszają się, teoretycznie, ruchem wiecznym.

Dlaczego? Wiemy, z definicji pracy, że jest ona równa iloczynowi przesunięcia i siły, która to przesunięcie powoduje, ale tylko wzdłuż przesunięcia⁹. Jeżeli siła działa prostopadle do przesunięcia, a tak jest w ruchu po okręgu, to siła *nie wykonuje* pracy. Siła grawitacji, pełniąc w ruchu planet rolę siły dośrodkowej, jest prostopadła do kołowej trajektorii, więc nie wykonuje pracy. Jeżeli nad planetami nie jest wykonywana praca, to z prawa zachowania energii wynika, że *energia* ruchu planet nie zmienia się. Ruch jest wieczny!

⁹ Zob. np. *Toruński poręcznik do fizyki. Gimnazjum klasa I*. Wydawnictwo Naukowe UMK, 2010 str. 85.



Rys. 1.7. Pokonywanie zakrętów jest szczególnie niebezpieczne na motocyklach – duża masa kół powoduje, że efekt żyroskopowy jest duży i dla skrótu trzeba pochylić motocykl. **a)** Źródłem siły dośrodkowej jest siła tarcia szosy o oponę (strzałka niebieska), jest ona *niewiększa* niż siła *nacisku* opon na szosę (a ta równa ciężarowi motocyklisty i motocykla, strzałka czerwona); na motocyklistę działa też siła odśrodkowa bezwładności (jasnozielona) – suma tych dwóch sił wyznacza kierunek pochylenia motocykla; **b)** jeśli z powodu nadmiernej szybkości siła dośrodkowa przekroczy *możliwą* największą wartość siły tarcia, motocykl (żyroskopowo) utrzymuje swój kierunek ruchu ale dla motocyklisty skutki są bolesne! [źródło: TV Italia 1]

1.4. Ruch po okręgu – siła dośrodkowa

W poprzednim paragrafie pokazaliśmy, że z ruchem po okręgu wiąże się *przyspieszenie* dośrodkowe. Jeżeli takie przyspieszenie występuje, musi ono mieć swoją przyczynę, czyli *siłę*. Siłę powodującą ruch po okręgu nazywamy *siłą dośrodkową*. Co jest przyczyną siły dośrodkowej?



Rys. 1.8. Siła dośrodkowa jako przyczyna ruchu po okręgu. **a)** Na pochylonym torze rowerowym jest nią nie tyle siła tarcia opon o tor (jak w wyścigach motocyklowych) co siła wypadkowa (żółta) będąca sumą siły ciężkości (czerwonej) i siły reakcji toru (niebieskiej); **b)** w przyspieszaczach elektronów (tzw. synchrotronie) źródłem siły dośrodkowej zakrzywiającej tor elektronów jest odpowiednio ukształtowane pole magnetyczne; nie cały tor elektronów jest zakrzywiony – tylko tam, gdzie są magnesy [źródło: RAI, DESY]

Przyczyn siły dośrodkowej może być tyle, ile przyczyn sił „zwykłych”. Dla kuli na końcu sportowego „młota” jest to siła, z którą ciągnie tę kulę miotacz (rys. 1.10a), dla planet jest to siła grawitacji ze strony Słońca, dla motocykla i samochodu na zakręcie jest to siła tarcia (rys. 1.7a), dla roweru na pochylonym torze jest to również składowa siły reakcji toru, (rys. 1.8a), dla cząstek elementarnych w centrum badań jądrowych CERN jest to pole magnetyczne

(rys.1.8b), dla elektronów w atomie jest to siła elektrostatyczna (rys. 1.10b). Ile wynosi siła dośrodkowa? Jest to bardzo proste, biorąc pod uwagę II zasadę dynamiki Newtona: siła F jest proporcjonalna do przyspieszenia a i do masy m przyspieszanego ciała

$$F = ma \quad (1.9)$$

Podkreślamy, zgodnie z zapisem (1.9), że i siła i przyspieszenie są wektorami, więc kierunek siły jest taki sam jak przyspieszenia. Siła dośrodkowa, powodująca ruch ciała po okręgu ma kierunek taki jak przyspieszenie poruszającego się ciała, czyli do środka okręgu.

Powodem ruchu po okręgu jest występowanie siły dośrodkowej.

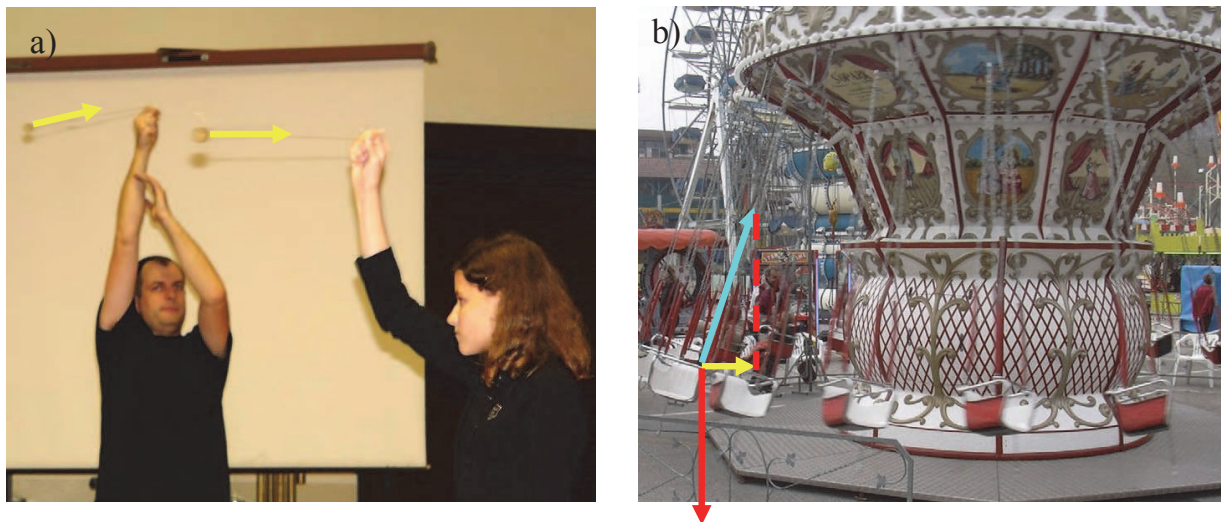
Jeżeli ruch ten jest *jednostajny*, siła dośrodkowa jest *jedyną* siłą działającą na poruszające się (po okręgu) ciało.

Biorąc pod uwagę równanie (1.6) na przyspieszenie dośrodkowe z łatwością znajdujemy wyrażenie na wartość *siły* dośrodkowej

$$F = m \frac{v^2}{R} \quad (1.10)$$

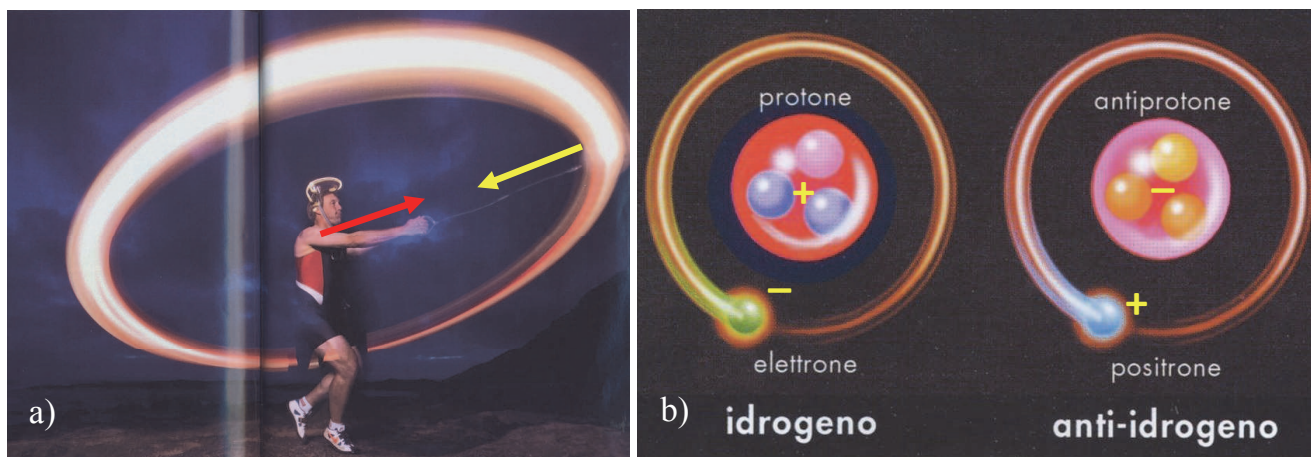
Siła dośrodkowa jest proporcjonalna do masy ciała i do przyspieszenia dośrodkowego. Poprzez przyspieszenie dośrodkowe, również *siła* dośrodkowa zależy od *prędkości* ciała i *promienia* okręgu.

Podkreślamy, że siła dośrodkowa musi być zawsze „odpowiednia” do wymaganej trajektorii, tj. dla prędkości ruchu i promienia okręgu, zgodnie z równaniem (1.10). W odróżnieniu od *przyspieszenia* dośrodkowego, *siła* dośrodkowa *zależy* też od masy. Wyjaśnimy to dokładniej na kolejnych rysunkach.



Rys. 1.9. a) Wartość siły dośrodkowej (żółta strzałka) zależy od przyspieszenia dośrodkowego ale również od masy poruszającego się ciała – dla kręcenia piłką tenisową nie potrzeba zawodowego atlety; b) dla siodelka karuzeli źródłem siły dośrodkowej (żółta strzałka) jest wypadkowa siły ciężkości (czerwona strzałka) i naciągu liny (strzałka niebieska).

Jak widać z porównania fot. 1.9a i 1.10a, jeżeli do zakręcenia ciężką, żelazną kulą potrzebny jest zawodowy atleta, to do zakręcenia piłką tenisową wystarczy uczennica gimnazjum: przy tej samej prędkości (liniowej) kuli i tym samym promieniu okręgu, większej siły trzeba użyć do kręcenia większą masą. Foto 1.10a pokazuje jeszcze jedną zależność: miotacz działa siłą na kulę ale i kula działa na miotacza siłą reakcji, o tej samej wartości ale przeciwnym zwrocie. Kula zatacza okręgi ale i miotacz również – mniejsze, bo ma większą masę.



Fot. 1.10. Siła dośrodkowa jako przyczyna ruchu po okręgu. **a)** Dla miotanej kuli w rzucie „młotem” źródłem siły dośrodkowej (żółta strzałka) jest miotacz; na miotacza działa siła reakcji (czerwona) o tej samej wartości a przeciwnym zwrocie; masa miotacza jest większa niż kuli, więc jego przyspieszenie dośrodkowe jest mniejsze – miotacz zatacza mniejszy okrąg niż kula (aureola nad głową) (źródło: National Geographic); **b)** dla (ujemnego) elektronu w atomie wodoru i (dodatniego) antyelektronu w antywodorze siłą dośrodkową jest przyciąganie elektrostatyczne od jądra: od dodatniego protonu w wodorze, a od ujemnego antiprotonu w antywodorze (źródło: Il Nuovo Saggiatore)]

Przykład 1.3

Zakręt ma promień 50 metrów. Oblicz, jaka siła dośrodkowa działa na samochód, jeśli pokonuje on ten zakręt z prędkością $v = 20$ m/s (czyli 72 km/h) a jego masa wynosi $m = 1000$ kg. Jaka siła działa na samochód ciężarowy o masie $M = 20$ ton, poruszający się z prędkością $V = 36$ km/h ?

Dane:

$$\begin{aligned} R &= 50 \text{ m} & v &= 20 \text{ m/s} \\ m &= 1000 \text{ kg} & V &= 10 \text{ m/s} \\ M &= 20\,000 \text{ kg} \end{aligned}$$

Siłę dośrodkową obliczamy ze wzoru (1.10) $F = \frac{mv^2}{R}$.

Podstawiając wartość liczbowe otrzymujemy dla samochodu osobowego

$$F = 1000 \cdot (20)^2 / 50 = 8000 \text{ N}$$

Jest to bardzo duża siła, w porównaniu z siłą ciężkości (ciężarem) samochodu, który wynosi 9810 N – samochód ryzykuje wypadnięcie z szosy.

Dla samochodu ciężarowego

$$F = 20\,000 \cdot (10)^2 / 50 = 40\,000 \text{ N}$$

Jest to więcej niż siła dośrodkowa dla wspomnianego samochodu osobowego, ale w porównaniu z ciężarem samochodu ciężarowego (196 200 N) *stosunkowo* mniej.

Przykład 1.4

Jaka jest największa prędkość, przy której na śliskiej szosie nie wypadnie z niej samochód o masie 1000 kg, jeśli współczynnik tarcia wynosi $f = 0,3$ a promień zakrętu wynosi 60 metrów? Ile wynosi siła tarcia statycznego działająca na samochód?

Dane:

$$R = 60 \text{ m} \quad f = 0,3$$

$$m = 1000 \text{ kg}$$

Szukane: v ?

Samochód nie wypadnie z szosy, o ile siła tarcia będzie dostatecznie duża, aby powodować ruch po torze kolistym (tzn. o ile będzie pełniła rolę siły dośrodkowej).

Maksymalna siła T tarcia kół o szosę¹⁰ jest równa sile nacisku mg , gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim, pomnożonej przez współczynnik tarcia statycznego f .

$$T = fmg = 0,3 \cdot 1000 \cdot 9,81 = 2980 \text{ N}$$

Siłę dośrodkową obliczamy ze wzoru $F = mv^2/R$

Dla znalezienia maksymalnej prędkości przyrównujemy siłę tarcia i siłę dośrodkową

$$fmg = \frac{mv^2}{R}$$

Masa m występująca po obu stronach równania upraszcza się i po przekształceniach otrzymujemy

$$v = \sqrt{(fRg)}$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy

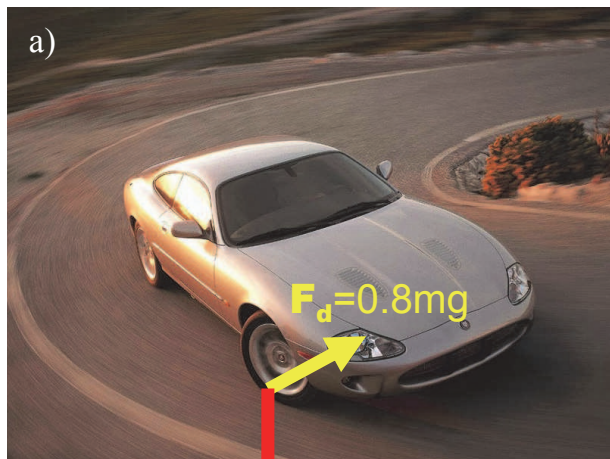
$$v = \sqrt{(0,3 \cdot 60 \cdot 9,81)} = 13 \text{ m/s}$$

Przeliczając tę prędkość na kilometry na godzinę otrzymujemy

$$v = 13 \cdot 3600 / 1000 = 47,8 \text{ km/h}$$

W warunkach mokrej szosy samochód *na pewno* wypadnie z tego zakrętu, jeśli będzie jechał z prędkością 48 km/h lub większą. Prędkość ta nie zależy od masy samochodu a jedynie od współczynnika tarcia opon o szosę (czyli stanu opon i nawierzchni szosy).

Nawet w warunkach idealnej szosy i najlepszych opon jak w Formule 1, tzn. zakładając współczynnik tarcia $f=1$, samochód wypadnie z szosy, jeśli na tym zakręcie będzie poruszał się z prędkością 24,3 m/s, czyli 87 km/h. Rozumiesz teraz, dlaczego nawet w Formule 1 kierowcy bardzo zwalniają przed ostrymi zakrętami! Sprawdź obliczenia, jeśli nie wierzysz.



Fot. 1.11. a) Na samochód na zakręcie działa siła dośrodkowa (strzałka żółta), spowodowana tarcie kół o nawierzchnię – źródłem tej siły jest szosa. Siła tarcia statycznego, zależy od ciężaru samochodu (strzałka czerwona) oraz współczynnika tarcia f i „dostosowuje się” do roli siły dośrodkowej, przyjmując w zależności od przyspieszenia dośrodkowego wartości od 0 do fmg ; tu założyliśmy $f=0,8$; samochód wpada w poślizg, gdy siła tarcia staje się zbyt mała dla zadanej trajektorii i prędkości ruchu; **b)** zależność siły dośrodkowej od masy nie powinna wprowadzać w błąd kierowców: i dla ciężarówki i dla zabawkowego samochodu próba zbyt szybkiego pokonaniu zakrętu powoduje **wypadnięcie** z szosy; stabilność na zakręcie zależy od tego, czy siła tarcia (większa dla cięższego samochodu) jest wystarczająco duża w porównaniu z siłą dośrodkową; siła tarcia jest zawsze **mniejsza** od ciężaru mg .

¹⁰ Rozważamy działanie siły tarcia w kierunku poprzecznym do kierunku toczenia się kół. W kierunku poprzecznym tarcie ma charakter statyczny – koło nie ślizga się ani nie toczy.

1.5. Ruch po okręgu – siła odśrodkowa

Na fot.1.10a zaznaczyliśmy, oprócz siły dośrodkowej działającej na kulę, również siłę działającą na miotacza. Wynika ona z III zasady dynamiki Newtona: jeśli ciało A działa na ciało B siłą F to ciało B działa na ciało A siłą o tej samej wartości ale przeciwnie skierowaną. Na miotacza działa siła o tej samej wartości, z jaką miotacz utrzymuje kręcącą się kulę. Siłę taką nazywamy siłą *odśrodkową*.

Siłą odśrodkową nazywamy siłę działającą na punkt centralny obrotu. Siła ta jest siłą reakcji ze strony poruszającego się ciała na siłę dośrodkową.

Siła odśrodkowa działa np. na rękę uczennicy kręcącej piłką na fot. 1.9a i na Ziemię, dookoła którego krąży Księżyc. Z tego też powodu, Księżyc krąży dookoła Ziemi, ale i Ziemia, mimo że 80 razy cięższa od Księżyca, też wokół niego nieco „tańczy”.

Zadanie 1.4 (trudne)

Spróbujmy obliczyć, po jakim okręgu porusza się głowa miotacza na fot. 1.10a, jeżeli kula porusza się na okręgu promieniu 2 metrów¹¹.

Wzór $F = m \frac{v^2}{R}$ nie jest wystarczający do rozwiązania tego zagadnienia: prędkość liniowa kuli i lampy na głowie miotacza są różne. Identyczne pozostają ich prędkości *kątowe*, tzn. kąt, jaki zataczają w danej jednostce czasu. Związek między prędkością kątową ω a prędkością liniową jest następujący¹²

$$v = \omega R \quad (1.11)$$

Zastępując we wzorze (1.10) prędkość liniową przez prędkość kątową otrzymujemy alternatywny wzór na siłę dośrodkową

$$F = m\omega^2 R \quad (1.12)$$

Z równości sił i prędkości kątowych możemy wywnioskować, że promienie orbit krążących wokół siebie dwóch ciał mają się do siebie jak odwrotności ich mas. Masa miotacza jest zapewne dziesięć razy większa niż masa kuli (7,2 kg), więc ich orbity mają się do siebie jak 1:10, co widać na rys. 1.10a. Obserwacje cyklicznych choć niewielkich zmian położenia gwiazd są jednym ze sposobów na poszukiwania planet krążących dookoła odległych słońc.

Z powodu znacznej różnicy mas protonu i elektronu, na rysunku 1.10b nie zaznaczamy, że proton również krąży, bo jego orbita ma promień 1/1837 razy mniejszy niż orbita elektronu. W przypadku Ziemi i Księżyca punkt, dookoła którego oba ciała niebieskie krążą, znajduje się 1700 km pod powierzchnią Ziemi.

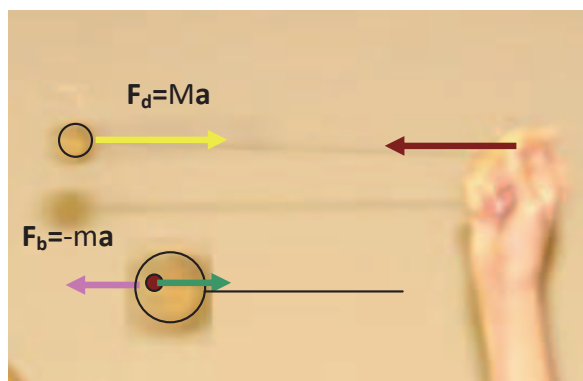
1.6. Ruch po okręgu – siły bezwładności

Przyczyną ruchu po okręgu jest siła *do-środkowa*. Jak to się więc dzieje, że pasażerowie w samochodzie pokonującym „na gazie” ostry zakręt czują siłę wypychającą ich na zewnątrz zakrętu? Odpowiedź otrzymamy ponownie z III prawa dynamiki Newtona.

¹¹ Dokładniej rzecz biorąc, należy i dla kuli i dla miotacza znaleźć wspólny punkt, dookoła którego obaj wirują – kula na dłuższym promieniu, a miotacz na krótszym. Tym punktem jest środek masy miotacza i kuli razem wziętych.

¹² Zob. np. *Toruński poręcznik do fizyki. Gimnazjum klasa I*, Wyd. Naukowe UMK, 2010, str. 56.

Rozważamy ruch po okręgu nie z punktu widzenia obserwatora zewnętrznego, ale z punktu widzenia obserwatora, który się po okręgu porusza, np. mrówki, która przez pomyłkę weszła do piłki, którą kręci Katarzyna (fot. 1.11).



Fot. 1.12. Siła dośrodkowa (F_d , żółta) działająca na wirującą piłkę jest równa co do wartości sile odśrodkowej (czerwonej), działającej na rękę Kasi. Ziarnko piasku w piłce naciska od wewnątrz na ściankę piłki (F_b , strzałka różowa) – jest to siła *odśrodkowa bezwładności*. Jest to siła reakcji wynikająca z III zasady dynamiki Newtona – to ścianka piłki naciska na ziarnko (strzałka zielona) tak, aby i ono podlegało przyspieszeniu dośrodkowemu, razem z piłką. Siła odśrodkowa bezwładności jest siłą pozorną, związaną z tym, że cała piłka podlega przyspieszeniu.

Na mrówkę (lub ziarnko piasku) wewnątrz piłki działa siła dośrodkowa, powodująca, że i mrówka porusza się po okręgu, razem z całą piłką. Źródłem tej siły jest wewnętrzna ścianka piłki, zob. powiększenie na fot. 1.12. Z III zasady dynamiki Newtona wynika, że mrówka też działa siłą na piłkę – siłą skierowaną od środka osi obrotu. Jest to siła bezwładności i nazywamy ją siłą *odśrodkową bezwładności*. Jest to siła pozorna, związana z tym, że cała piłka w swym ruchu po okręgu ustawicznie przyspiesza ku środkowi okręgu.

Siła dośrodkowa działająca na piłkę ze strony ręki Katarzyny, F_d na rys. 1.12, zależy od przyspieszenia dośrodkowego a i masy piłki M , zgodnie ze wzorem $F_d = Ma$. Siła odśrodkowa bezwładności, która wciska mrówkę w ściankę piłki zależy od przyspieszenia i od masy *mrówki* m , $F_b = -ma$. Znak minus w tym ostatnim wzorze ma przypominać, że mrówka ciśnie w kierunku *od*-środkowym.

Siła odśrodkową bezwładności jest siłą pozorną.

To siła odśrodkowa bezwładności wciska w fotel pasażerów samochodu pokonującego zakręt z dużą prędkością.



Fot. 1.13. Zakręty, pozornie łagodne, ale z ograniczeniem prędkości do 70 km/h okazują się dla kierowców bardzo niebezpieczne. Przekroczenie szybkości do 100 km/h *podwaja* ryzyko wypadnięcia z zakrętu. Doświadczony kierowca w warunkach deszczu zwolni do 50 km/h, co *obniża* dwukrotnie ryzyko wypadku; na tym zdjęciu mały samochód został wypchnięty z drogi przez pirata (foto MK)

Na zakończenie, jeszcze raz o niebezpiecznych zakrętach drogowych. Pirat, który przeżył wypadnięcie z zakrętu gotów jest przysiąc, że to „niewidzialna” siła wypchnęła go z zakrętu. Ale to nie jest tak. Zabrakło, po prostu, siły dośrodkowej. Innymi słowy, samochód pirata drogowego nie „wypada” z zakrętu – on zwyczajnie **jedzie na wprost**, zgodnie z I prawem dynamiki Newtona. Na samochód nie działają siły ze strony drogi, bo koła straciły „przyczepność”; samochód porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, a to tylko droga uciekła w bok! Warto uczyć się praw fizyki.

1.7. Ruch po okręgu i grawitacja

Uzbrojeni w znajomość sił działających w ruchu po okręgu możemy wrócić do modelu Kopernika z rys. 1.2. Jak to się dzieje, że planety na dalszych orbitach poruszają się wolniej? Wynika to z równowagi sił: rolę siły *dośrodkowej* w ruchu planet pełni siła *grawitacji*. To było chyba najważniejsze spostrzeżenie Izaaka Newtona dla całej fizyki. Powtórzmy jego rozumowanie.

Szukamy, jaki jest okres obiegu planety, znajdującej się w określonej odległości od Słońca (np. Ziemia, $R = 150$ mln km). Załóżmy, że znamy masę Słońca ($M = 2 \cdot 10^{30}$ kg)

Przyrównajmy wzór na siłę dośrodkową (1.10) ze wzorem na siłę oddziaływania grawitacyjnego Słońce – Ziemia.

$$F = m \frac{v^2}{R} = G \frac{Mm}{R^2} \quad (1.13)$$

gdzie przez m oznaczyliśmy masę planety.

Przekształcając powyższe równanie (upraszczając przez m/R) otrzymujemy

$$v^2 = G \frac{M}{R} \quad (1.14)$$

Wynik ten jest bardzo ciekawy. Po pierwsze, im planeta dalej od Słońca (większe R) tym porusza się wolniej (jej prędkość liniowa jest mniejsza). Po drugie, prędkość ruchu planet nie zależy od ich masy, a jedynie od masy Słońca.

Prędkość poruszania się planety w kosmosie jest trudna do zmierzenia; znacznie łatwiej, za Kopernikiem, zmierzyć *okres* jej obiegu. Zależność między okresem obiegu T a prędkością liniową znajdziemy wiedząc, że w ciągu jednego okresu planeta zatacza pełny okrąg, czyli przebywa drogę $2\pi R$. Mamy więc zależność

$$2\pi R = vT \quad (1.15)$$

skąd otrzymujemy

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad (1.16)$$

Podstawiając tę zależność do równania (1.14) dostajemy

$$\left(\frac{2\pi R}{T} \right)^2 = G \frac{M}{R} \quad (1.17)$$

skąd po przekształceniach mamy

$$R^3 = G \frac{M}{4\pi^2} T^2 \quad (1.18)$$

lub krócej

$$\frac{R^3}{T^2} = \text{const} \quad (1.19)$$

Zapisaaliśmy powyższe prawo w specjalnej ramce, aby podkreślić, że było to jedno z najważniejszych odkryć w historii astronomii. Równanie (1.17) mówi rzecz następującą.

Kwadraty okresów obiegu planet dookoła Słońca mają się do siebie jak sześciany ich odległości od Słońca.

Tę zależność nazywamy trzecim prawem Keplera.

Johannes Kepler (1571-1630) odkrył to prawo doświadczalnie; dzięki Newtonowi potrafimy je uzasadnić teoretycznie.

Przykład 1.5

Obliczmy, jak się mają do siebie okresy obiegu Ziemi i Saturna dookoła Słońca. Saturn (T_h) znajduje się od Słońca w odległości R_h (w przybliżeniu) dziesięć razy większej niż Ziemia¹³. Okres obiegu dookoła Słońca T_h w jednostkach lat ziemskich obliczymy zapisując prawo (1.19) w postaci

$$\frac{R_h^3}{T_h^2} = \frac{R_{\oplus}^3}{T_{\oplus}^2} \quad (1.20)$$

gdzie przyjmiemy odległość Ziemia – Słońce $R_{\oplus}=1$ i okres obiegu (w latach) dla Ziemi $T_{\oplus}=1$.

Stąd mamy, podstawiając dokładną wartość liczbową $R_h=9,54$

$$R_h^3 = T_h^2 = 868$$

czyli $T_h = \sqrt{868} = 29,5$ lata.

Jest to wynik bardzo podobny do danych Kopernika, który podawał okres obiegu Saturna na 30 lat, zob. fot. 1.2. i odpowiadający dokładnej wartości, na stan z roku 2000.

Przykład 1.6

Obliczmy, z dokładnością do 3 cyfr znaczących, ile wynosi obieg Ziemi dookoła Słońca. Masa Słońca wynosi w przybliżeniu $2 \cdot 10^{30}$ kg a odległość Ziemia – Słońce $150 \cdot 10^9$ m.

Skorzystamy z przekształconego wzoru (1.18)

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM} = \frac{4 \cdot (3,14)^2 \cdot (150 \cdot 10^9)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}} = 997,8 \cdot 10^{10}$$

stąd T w sekundach wynosi $316 \cdot 10^6$ s, a co zamienione na dni (przyjmując bardzo niedokładnie, że dzień ma 24 godziny) daje 365,5 dnia. Wynik całkiem dobry, biorąc pod uwagę przyjęte przybliżenia stałej grawitacji, masy Słońca i odległości Ziemia – Słońce.

Trzecie prawo Keplera stosuje się nie tylko do układu Słońce – planety ale także do Ziemi i Księżyca lub satelitów Jowisza¹⁴. W szczególności stosuje się do sztucznych satelitów Ziemi. Masą w równaniu (1.18) jest w tym przypadku masa Ziemi. Poszukajmy, w jakiej odległości od środka Ziemi należy umieścić na orbicie satelitę, aby jego okres obiegu Ziemi wynosił 24 godziny. Innymi słowy, na jakiej wysokości latają satelity *geostacjonarne*¹⁵?

Przykład 1.7

Na jakiej wysokości od środka Ziemi znajdują się satelity geostacjonarne? Przyjąć masę Ziemi $M = 59 \cdot 10^{23}$ kg a dobę jako 24 godziny¹⁶.

Dane: $M = 59 \cdot 10^{23}$ kg

$T = 24\text{h} = 24 \cdot 3600 \text{ s} = 86400 \text{ s}$

Skorzystamy z równania (1.18).

$$R^3 = G \frac{M}{4\pi^2} T^2 = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{59 \cdot 10^{23}}{4 \cdot (3,14)^2} (86400)^2 = 74,5 \cdot 10^{21}$$

Stąd otrzymujemy, za pomocą kalkulatora, $R = 4,2 \cdot 10^7$ km.

¹³ Zob. dane w jakiegokolwiek encyklopedii astronomicznej (podajemy tzw. „pół wielką”)

¹⁴ Więcej o satelitach Jowisza w rozdziale IV.

¹⁵ Satelity geostacjonarne tzn. takie, które widać z Ziemi zawsze w tym samym położeniu niezależnie od tego, że Ziemia się kręci, są np. satelity telewizyjne. Krążą one dookoła Ziemi w płaszczyźnie równika.

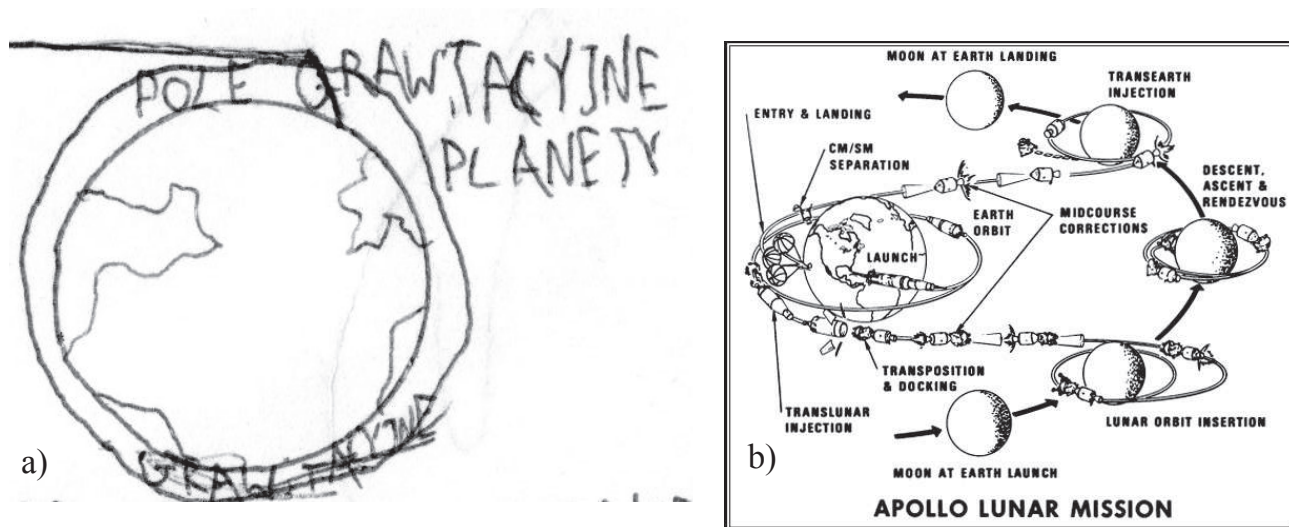
¹⁶ Jak wyjaśnimy w rozdziale IV, okres obrotu Ziemi wokół własnej osi jest o 4 minuty krótszy niż 24 godzin.

Satelity geostacjonarne (np. telewizyjne) latają w odległości 42 tys. km od środka Ziemi. Przyjmując, że promień Ziemi to 6,3 tys. km, satelity geostacjonarne latają ok. 36 tys. km nad powierzchnią Ziemi. Dla porównania, satelita do pomiarów pola grawitacyjnego Ziemi (GOCE) lata na wysokości zaledwie 150 km nad powierzchnią Ziemi.

Zadanie 1.7: Oblicz okres obiegu trzeciego z dużych satelitów Jowisza (Ganimedesa). Masa Jowisza wynosi $1900 \cdot 10^{23}$ kg i odległość Ganimedesa od środka Jowisza 1 mln km. Stałą grawitacji przyjmij $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$. Porównaj wynik z wartością obserwowaną $T = 7,1$ dnia.

1.8. Grawitacja – loty kosmiczne

W 1865 r. francuski pisarz powieści fantastyczno-naukowych, Juliusz Verne wyobrażał sobie lot ludzi na Księżyc w pocisku wystrzelonym z gigantycznej armaty¹⁷. Mimo, że w locie na Księżyc (100 lat później) użyto rakiety, fizycy rozważają hipotetyczną prędkość, jaką należałoby nadać pociskowi, aby mógł okrążyć Ziemię, zob. rys. Kuby na rys.1.14.



Fot. 1.14. (a) Wyjaśnienie I i II prędkości kosmicznej: wystrzelony pocisk z armaty okrąży Ziemię - I prędkość kosmiczna lub z Ziemi odlatuje oddalając się w nieskończoność - II prędkość kosmiczna (rys. Kuba Garbacz); **(b)** schemat „prawdziwego” lotu na Księżyc, misji Apollo (Źródło: NASA)

Problem 1.8 Jaką prędkość należy nadać pociskowi wystrzelonemu poziomo, aby okrążył Ziemię?

Pocisk ma krążyć po orbicie kolistej dookoła Ziemi, niewiele nad jej powierzchnią. Przyjmiemy jako promień jego orbity promień Ziemi, $R = 6370$ km. Rolę siły dośrodkowej spełniać ma siła grawitacji, obliczona ze wzoru (1.1) dla odległości R

$$F = G \frac{Mm}{R^2},$$

gdzie tym razem M oznacza masę Ziemi a m masę pocisku. Siła grawitacji ma być równa sile dośrodkowej (równanie 1.10)

$$G \frac{Mm}{R^2} = m \frac{v^2}{R}$$

Masa pocisku m upraszcza się i otrzymujemy następującą równość

$$v^2 = G \frac{M}{R} \quad (1.21)$$

¹⁷ W podobny sposób miał podróżować bohater innej powieści, z XVIII wieku, Baron Münchhausen.

a stąd następujące wyrażenie na szukaną prędkość

$$v = \sqrt{G \frac{M}{R}} \quad (1.22)$$

Podstawiając wartości liczbowe, $M = 59,7 \cdot 10^{23}$ kg, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg² i promień Ziemi $6,37 \cdot 10^6$ m, otrzymujemy

$$v_I = 7,91 \cdot 10^3 \text{ m/s} \quad (1.23)$$

Tę prędkość nazywamy pierwszą prędkością kosmiczną.

Pierwsza prędkość kosmiczna określa, jaką prędkość należy nadać wystrzelonemu poziomo pociskowi, aby okrążył on Ziemię.

I prędkość kosmiczna (na Ziemi) wynosi $v_I = 7,91$ km/s.

Obliczenie (1.22) jest ważne, sprawdzimy więc poprawność przeliczenia jednostek.

$$[v] = \sqrt{\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \frac{\text{kg}}{\text{m}}} = \sqrt{\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \frac{\text{m}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

I prędkość kosmiczna jest wielkością charakteryzującą pole grawitacyjne planety na jej powierzchni, nieco podobnie jak przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni, wzór (1.3).

Jak na warunki ziemskie, prędkość prawie 8 km/s wydaje się ogromna. Jak na warunki kosmiczne nie jest ona taka zawrotna. Ziemia krąży dookoła Słońca z prędkością 30 km/s a cała nasza Galaktyka podąża w kierunku gwiazdozbioru Panny z prędkością około 400 km/s.

Czy I prędkość kosmiczna wystarczy, aby dolecieć na Księżyc? Nie! Ale policzenie prędkości, jaką należy nadać pociskowi, aby poleciał na Księżyc, nie jest takie łatwe. Wyprowadzenie to wymaga pewnych dodatkowych wzorów. Wzory te dotyczą pola grawitacyjnego, ale samo wyrażenie (1.1) na siłę oddziaływania grawitacyjnego już nam nie wystarczy. Wyprowadzenie prędkości niezbędnej, aby wysłać pocisk z Ziemi w daleki kosmos, przedstawiamy w następnym paragrafie.

Zadanie 1.9

Oblicz pierwszą prędkość kosmiczną dla Księżyca. Przyjmij masę Księżyca jako $M = 0,74 \cdot 10^{23}$ kg i promień Księżyca $R = 1,74 \cdot 10^6$ m. Porównaj tę prędkość z I prędkością kosmiczną dla Ziemi.

1.9. Energia w polu grawitacyjnym

Pierwsza prędkość kosmiczna jest wystarczająca dla okrążenia Ziemi natomiast jest za mała, aby z Ziemi dolecieć na Księżyc lub Marsa. Prędkość niezbędna do *ucieczki* z pola grawitacyjnego Ziemi nazywamy „drugą prędkością kosmiczną”. Dla jej obliczenia musimy wprowadzić nowe pojęcie – energii w polu grawitacyjnym.

Pojęcie energii potencjalnej w polu grawitacyjnym jest dobrze znane. *Energią nazywamy zdolność ciała do wykonania pracy.* Ciało podniesione na pewną wysokość i spuszczone swobodnie może wykonać pracę. Przykładowo, młotek spuszczone z pewnej wysokości wbija gwóźdź, kafar wbija pał, spadający wazon rozbija się na kawałki itd.

Również dobrze znany jest wzór na energię potencjalną E w polu grawitacyjnym Ziemi

$$E = mgh \quad (1.24)$$

gdzie m jest masą ciała, g – przyspieszeniem grawitacyjnym na powierzchni Ziemi (por. wzór 1.3) a h – wysokością, na jaką zostało podniesione ciało.

Niestety, wzoru tego nie możemy stosować, kiedy rozważamy zmiany energii na dużych odległościach. Wówczas odległość od środka Ziemi R we wzorze (1.3) zmienia się znacznie, i wzór (1.24) dawałby wartości błędne.

Aby wydedukować alternatywne wyrażenie na energię potencjalną, ważne również dla dużych zmian odległości od Ziemi przypomnijmy, że zmiana energii ΔE ciała jest równa, z definicji, pracy W wykonanej nad ciałem. Wzrost energii kinetycznej wystrzelonego pocisku równy jest pracy wykonanej nad pociskiem przez rozprężające się gazy w lufie armaty.

$$\Delta E = W \quad (1.25)$$

Poprawny, dla każdej odległości, wzór na energię potencjalną w polu grawitacyjnym wyprowadzimy na podstawie rozważań o wykonanej pracy. Jaką pracę należy wykonać, aby przenieść pocisk z punktu na powierzchni Ziemi, tj. z odległości od środka Ziemi $R_1 = 6370$ km na odległość nieskończoną, $R_2 = \infty$?

Przypominamy definicję pracy

$$W = F \cdot \Delta s \quad (1.26)$$

gdzie F jest działającą siłą a Δs przesunięciem, na jakim działała ta siła.

Siła w polu grawitacyjnym wyraża się dobrze już nam znanym wzorem

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

Mnożąc tę siłę przez przesunięcie $\Delta R = R_2 - R_1$ uzyskalibyśmy jakieś wyrażenie, które miałoby wymiar GMm/R .¹⁸ Jeszcze jedna trudność koncepcyjna wynika z faktu, że przesuując ciała z R_1 do nieskończoności siła grawitacji zmienia się od pewnej skończonej wartości dla R_1 do zera dla $R_2 = \infty$. Nie możemy więc uważać tej siły za stałą.

Prawidłowe wyrażenie na pracę w polu grawitacyjnym niezbędną do przeniesienia ciała o masie m w polu grawitacyjnym ciała o masie M (i na odwrót) z początkowej odległości między ciałami R_1 do końcowej odległości R_2 przedstawia wzór

$$W_{1 \rightarrow 2} = GMm \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.27)$$

Wzór (1.27) jest kluczem do znalezienia II prędkości kosmicznej. Wysłanie pocisku w daleki kosmos oznacza wykonanie pracy na dystansie od $R_1 = 6370$ km do $R_2 = \infty$. Praca ta wynosi

$$W_{1 \rightarrow \infty} = \frac{GMm}{R_1} \quad (1.28)$$

Praca ta dostarcza pociskowi energii kinetycznej. Zachodzi więc równość

$$\frac{GMm}{R_1} = \frac{mv^2}{2} \quad (1.29)$$

skąd otrzymujemy poszukiwaną wartość II prędkości kosmicznej

¹⁸ Rozważania tu przedstawione mają charakter jedynie jakościowy. Prawidłowe wyprowadzenie wzoru na energię potencjalną w polu grawitacyjnym nie jest trudne, ale wymaga rachunku całkowego.

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (1.30)$$

Wstawiając wartości liczbowe na masę Ziemi i promień Ziemi otrzymujemy wartość

$$v_{II} = 11,2 \cdot 10^3 \text{ m/s} \quad (1.31)$$

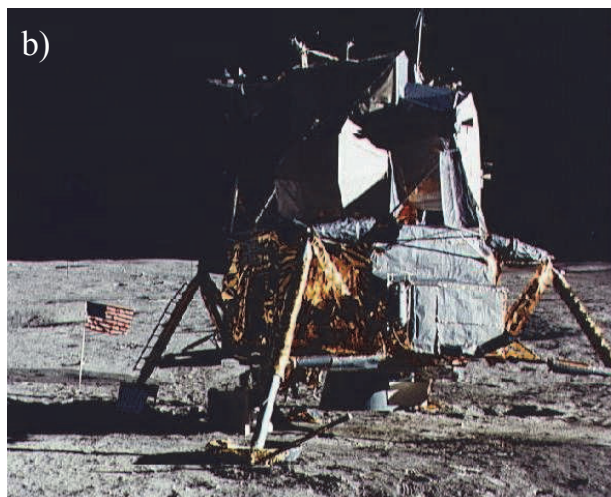
Zauważmy, że mimo zupełnie innego rozumowania przy wyprowadzaniu pierwszej i drugiej prędkości kosmicznej, uzyskane wartości różnią się tylko o czynnik $\sqrt{2}$. Związek ten jest, oczywiście, ważny dla wszystkich planet i innych ciał. Dla Księżyca prędkość ucieczki statku kosmicznego wynosi $v_{II} = 2,38 \text{ km/s}$.

Druga prędkość kosmiczna określa, z jaką prędkość należy wystrzelić pocisk, aby opuścił on Ziemię na zawsze.

II prędkość kosmiczna (na Ziemi) wynosi $v_I = 11,2 \text{ km/s}$.

W dobie lotów kosmicznych sposoby na uniesienie się z Ziemi wykorzystują wiele „trików” technicznych. Rakieta startująca z Ziemi na Księżyc była ogromna, o wysokości 110 metrów i o masie startowej 3 tys. ton. Musiała ona wynieść na orbitę dookoła Księżyca lądownik i moduł powrotny, który „parkował” na orbicie dookoła Księżyca. Z samego Księżyca startował już niewielki lądownik, o masie 4,7 tony, z czego 2,5 tony stanowiło paliwo niezbędne do dotarcia do modułu krążącego na orbicie parkingowej.

Dziś więc I i II prędkość kosmiczna mają bardziej znaczenie poznawcze niż praktyczne: pierwszą z nich obliczamy z równości siły grawitacji i siły dośrodkowej na orbicie o promieniu równym promieniowi Ziemi, drugą – z pracy niezbędnej do wyniesienia określonego ciała z odległości równej promieniowi Ziemi do nieskończoności.



Fot. 1.15. II prędkość kosmiczna dla Ziemi wynosi 11,2 km/s natomiast dla Księżyca tylko 2,38 km/s. Wystartowanie w kosmos z Księżyca jest więc o wiele łatwiejsze niż z Ziemi; **a)** Rakieta Saturn startująca z Ziemi miała wysokość 110 m i masę na starcie 3 tys. ton; **b)** lądownik księżycowy miał wysokość niecałe 10 metrów (łącznie z łapami) i masę startową 4,7 tony¹⁹ (Źródło: NASA)

¹⁹ Zob. materiały filmowe NASA nt. startu lądownika Apollo 17 z Księżyca na stronie ZDF UMK.

Wyrażenie (1.28) jest natomiast niezwykle ważne: wskazuje ono, jak obliczyć energię potencjalną E ciała w polu grawitacyjnym Ziemi, w odległości R od jej środka a niekoniecznie przy jej powierzchni. Energia ta wynosi

$$E(R) = -\frac{GMm}{R} \quad (1.32)$$

Energia potencjalna ciała znajdującego się w polu grawitacyjnym jest *ujemna*. Wynosi ona zero w nieskończoności, ale aby wynieść ciało do nieskończonej odległości, trzeba nad nim wykonać pracę. Jeśli nad ciałem wykonaliśmy pracę, to jego energia wzrosła.

W życiu codziennym ujemny znak energii potencjalnej w polu grawitacyjnym nie ma dla nas większego znaczenia. I tak interesują nas *względne* zmiany energii. Zresztą, wzór (1.32) nie jest w sprzeczności ze wzorem stosowanym na co dzień do obliczeń energii potencjalnej, tj. (1.24). We wzorze $E = mgh$ energia rośnie ze wzrostem wysokości h , we wzorze (1.32) energia również rośnie, jeśli $R_2 > R_1$. Rzeczywiście, różnica $E(R_2) - E(R_1)$ obliczona według wzoru (1.32) jest dodatnia, czyli $E(R_2) > E(R_1)$.

$$E(R_2) - E(R_1) = -GMm \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) > 0 \quad (1.33)$$

Wzór (1.32) na energię w (przyciągającym) polu grawitacyjnym będzie nam natomiast bardzo, bardzo przydatny przy modelowaniu atomu wodoru w następnym rozdziale.

Pytania (według podstawy programowej MEN):

1. Jaka jest interpretacja I prędkości kosmicznej? Oblicz ją.
2. Oblicz okres obiegu Wenus dookoła Słońca. Odległość Wenus od Słońca i masę Słońca znajdziesz w tabeli 4.1 w rozdziale IV.
3. Oblicz, z jaką prędkością musi latać satelita do pomiarów kształtu kuli ziemskiej („GOCE”), jeśli jego orbita jest zaledwie 150 km na powierzchnią Ziemi.
4. (rozszerzone) Jaka jest interpretacja II prędkości kosmicznej? Oblicz ją.
5. Oblicz drugą prędkość kosmiczną dla Marsa. Dane Marsa znajdziesz w tabeli 4.1.
6. (trudne) Oblicz, w jednostkach przyspieszenia ziemskiego g , jakie jest przyspieszenie dośrodkowe (tzn. w kierunku Ziemi) Księżyca, rys. 1.1. Przyjmij odległość Kuby od środka Ziemi 6 tys. km, przyspieszenie Kuby równe g a odległość środka Księżyca od środka Ziemi jako 380 tys. km. Wynik podaj w przybliżeniu ułamka prostego. (Skorzystaj umiejętnie ze wzoru 1.3.)

Rozdział II. Fizyka atomowa i cząsteczkowa

2.1. Dwie rewolucje: maszyny cieplne i elektryczność

Dzięki fizyce dokonały się co najmniej dwie rewolucje w historii ludzkości. Pierwsza z nich, nazwiemy ją lokomocyjną, w połowie XIX wieku. Jeszcze w 1825 roku, Adam Mickiewicz podróżował przez stepy Ukrainy powozem, aby następnie wsiąść w Odessie na statek żaglowy.

„-Wpłynąłem na suchego przestwór oceanu, wóz się nurza w zieloność i jak łódka brodzi”.

Czterdzieści lat później pisał rosyjski poeta Nikołaj A. Niekrasow¹:

„-Lecąc pośpiesznie po torze żelaznym,
Obmyślam pieśni pochwalne.”

Dziś, między Sankt Petersburgiem a Moskwą pociągi mkną z prędkością 220 km/h.

Podstaw rewolucji transportowej można się dopatrywać w połowie XVIII wieku. Wtedy to, w 1763 roku, James Watt² zbudował pierwszą maszynę zamieniającą energię gorącej pary wodnej na energię napędzającą maszyny przemysłowe. Minęło ponad pół wieku, zanim maszyny parowe stały się na tyle ”zgrabne”, aby móc napędzać lokomotywę kolejową³. W 1829 roku G. Stephenson nazwał swoją lokomotywę „Rakieta”; osiągała ona „zawrotną” prędkość 50 km/h. Nie byłoby potęgi Stanów Zjednoczonych, gdyby nie budowana z wielkim trudem linia kolejowa między wschodnim a zachodnim wybrzeżem.



Fot. 2.1. Wykorzystanie maszyny parowej: **a)** samochód strażacki na parę z 1879 roku, „powerhouse” Museum w Sydney; **b)** lokomotywy parowe z początku XX wieku, Muzeum Nauki i Techniki w Mediolanie (Foto MK)

Wiek XIX zakończył się zbudowaniem pierwszych silników samochodowych, benzynowego przez Augusta Otto w 1863 roku i na olej napędowy przez Rudolfa Diesla w 1897 roku. Silnik benzynowy pozwolił braciom Orville i Wilbur Wright, konstruktorom rowerów, na wzniesienie się w powietrze za pomocą samolotu (17 grudnia 1903 r).

¹ Bystro leczu ja po relsom, uczgunnym, dumaju dumu swójú, tłumaczenie dowolne GK

² Od jego nazwiska mamy jednostkę fizyczną *mocy*. W watach mierzymy moc czajnika (500 W), grzejnika pralki (3 kW), moc silnika samochodu (setki kilowatów), statku żeglugi przybrzeżnej (foto 1.2) i moc nadawczą komórki (według norm technicznych do 10 W).

³ 29 IX 1825 – otwarcie pierwszej kolei ze Stockton do Darlington (40 km). Warszawa uzyskała połączenie kolejowe z Wiedniem w 1848 r. Źródło: materiały historyczne PKP <http://www.pkp.pl/node/170>