a stąd następujące wyrażenie na szukaną prędkość

$$\mathrm{v} = \sqrt{G\frac{M}{R}} \tag{1.22}$$

Podstawiając wartości liczbowe, $M = 59{,}7\cdot10^{23}$ kg, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Nm^2/kg^2 i promień Ziemi $6{,}37\cdot10^{6}$ m, otrzymujemy

$$\mathrm{v}_{\mathrm{I}} = 7{,}91\cdot10^{3}\ \mathrm{m/s} \tag{1.23}$$

Tę prędkość nazywamy pierwszą prędkością kosmiczną.

Pierwsza prędkość kosmiczna określa, jaką prędkość należy nadać wystrzelonemu poziomo pociskowi, aby okrążył on Ziemię.

I prędkość kosmiczna (na Ziemi) wynosi v_{I} = 7,91 km/s.

Obliczenie (1.22) jest ważne, sprawdzimy więc poprawność przeliczenia jednostek.

$$[\mathrm{v}] = \sqrt{\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{kg\cdot m}}{\mathrm{s^2}}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

I prędkość kosmiczna jest wielkością charakteryzującą pole grawitacyjne planety na jej powierzchni, nieco podobnie jak przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni, wzór (1.3).

Jak na warunki ziemskie, prędkość prawie 8 km/s wydaje się ogromna. Jak na warunki kosmiczne nie jest ona taka zawrotna. Ziemia krąży dookoła Słońca z prędkością 30 km/s a cała nasza Galaktyka podąża w kierunku gwiazdozbioru Panny z prędkością około 400 km/s.

Czy I prędkość kosmiczna wystarczy, aby dolecieć na Księżyc? Nie! Ale policzenie prędkości, jaką należy nadać pociskowi, aby poleciał na Księżyc, nie jest takie łatwe. Wyprowadzenie to wymaga pewnych dodatkowych wzorów. Wzory te dotyczą pola grawitacyjnego, ale samo wyrażenie (1.1) na siłę oddziaływania grawitacyjnego już nam nie wystarczy. Wyprowadzenie prędkości niezbędnej, aby wysłać pocisk z Ziemi w daleki kosmos, przedstawiamy w następnym paragrafie.

Zadanie 1.9

Oblicz pierwszą prędkość kosmiczną dla Księżyca. Przyjmij masę Księżyca jako $M = 0{,}74\cdot10^{23}$ kg i promień Księżyca $R = 1{,}74\cdot10^{6}$ m. Porównaj tę prędkość z I prędkością kosmiczną dla Ziemi.

1.9. Energia w polu grawitacyjnym

Pierwsza prędkość kosmiczna jest wystarczająca dla okrążenia Ziemi natomiast jest za mała, aby z Ziemi dolecieć na Księżyc lub Marsa. Prędkość niezbędna do *ucieczki* z pola grawitacyjnego Ziemi nazywamy „drugą prędkością kosmiczną”. Dla jej obliczenia musimy wprowadzić nowe pojęcie – energii w polu grawitacyjnym.

Pojęcie energii potencjalnej w polu grawitacyjnym jest dobrze znane. *Energią nazywamy zdolność ciała do wykonania pracy*. Ciało podniesione na pewną wysokość i spuszczone swobodnie może wykonać pracę. Przykładowo, młotek spuszczony z pewnej wysokości wbija gwóźdź, kafar wbija pal, spadający wazon rozbija się na kawałki itd.

Również dobrze znany jest wzór na energię potencjalną E w polu grawitacyjnym Ziemi

$$E = mgh \tag{1.24}$$

gdzie m jest masą ciała, g – przyspieszeniem grawitacyjnym na powierzchni Ziemi (por. wzór 1.3) a h – wysokością, na jaką zostało podniesione ciało.

Niestety, wzoru tego nie możemy stosować, kiedy rozważamy zmiany energii na dużych odległościach. Wówczas odległość od środka Ziemi R we wzorze (1.3) zmienia się znacznie, i wzór (1.24) dawałby wartości błędne.

Aby wydedukować alternatywne wyrażenie na energię potencjalną, ważne również dla dużych zmian odległości od Ziemi przypomnijmy, że zmiana energii ΔE ciała jest równa, z definicji, pracy W wykonanej nad ciałem. Wzrost energii kinetycznej wystrzelonego pocisku równy jest pracy wykonanej nad pociskiem przez rozprężające się gazy w lufie armaty.

$$\boxed{\Delta E = W} \tag{1.25}$$

Poprawny, dla każdej odległości, wzór na energię potencjalną w polu grawitacyjnym wyprowadzimy na podstawie rozważań o wykonanej pracy. Jaką pracę należy wykonać, aby przenieść pocisk z punktu na powierzchni Ziemi, tj. z odległości od środka Ziemi $R_1 = 6370$ km na odległość nieskończoną, $R_2 = \infty$?

Przypominamy definicję pracy

$$\boxed{W = F \cdot \Delta s} \tag{1.26}$$

gdzie F jest działającą siłą a Δs przesunięciem, na jakim działała ta siła.

Siła w polu grawitacyjnym wyraża się dobrze już nam znanym wzorem

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

Mnożąc tę siłę przez przesunięcie $\Delta R = R_2 - R_1$ uzyskalibyśmy jakieś wyrażenie, które miałoby wymiar GMm/R.[18] Jeszcze jedna trudność koncepcyjna wynika z faktu, że przesuwając ciała z R_1 do nieskończoności siła grawitacji zmienia się od pewnej skończonej wartości dla R_1 do zera dla $R_2 = \infty$. Nie możemy więc uważać tej siły za stałą.

Prawidłowe wyrażenie na pracę w polu grawitacyjnym niezbędną do przeniesienia ciała o masie m w polu grawitacyjnym ciała o masie M (i na odwrót) z początkowej odległości między ciałami R_1 do końcowej odległości R_2 przedstawia wzór

$$\boxed{W_{1\to 2} = GMm\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} \tag{1.27}$$

Wzór (1.27) jest kluczem do znalezienia II prędkości kosmicznej. Wysłanie pocisku w daleki kosmos oznacza wykonanie pracy na dystansie od $R_1 = 6370$ km do $R_2 = \infty$. Praca ta wynosi

$$\boxed{W_{1\to\infty} = \frac{GMm}{R_1}} \tag{1.28}$$

Praca ta dostarcza pociskowi energii kinetycznej. Zachodzi więc równość

$$\frac{GMm}{R_1} = \frac{mv^2}{2} \tag{1.29}$$

skąd otrzymujemy poszukiwaną wartość II prędkości kosmicznej

[18] Rozważania tu przedstawione mają charakter jedynie jakościowy. Prawidłowe wyprowadzenie wzoru na energię potencjalną w polu grawitacyjnym nie jest trudne, ale wymaga rachunku całkowego.

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{1.30}$$

Wstawiając wartości liczbowe na masę Ziemi i promień Ziemi otrzymujemy wartość

$$\boxed{v_{II} = 11{,}2 \cdot 10^3 \text{ m/s}} \tag{1.31}$$

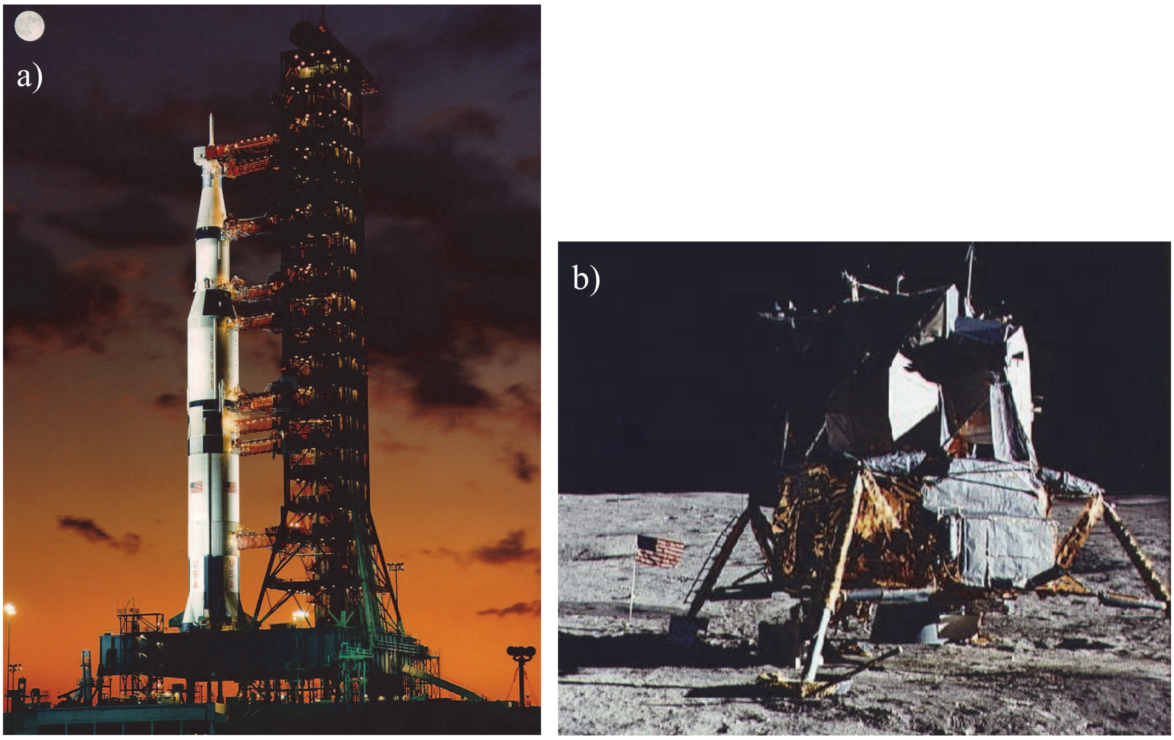
Zauważmy, że mimo zupełnie innego rozumowania przy wyprowadzaniu pierwszej i drugiej prędkości kosmicznej, uzyskane wartości różnią się tylko o czynnik $\sqrt{2}$. Związek ten jest, oczywiście, ważny dla wszystkich planet i innych ciał. Dla Księżyca prędkość ucieczki statku kosmicznego wynosi $v_{II} = 2{,}38$ km/s.

Druga prędkość kosmiczna określa, z jaką prędkość należy wystrzelić pocisk, aby opuścił on Ziemię na zawsze.

II prędkość kosmiczna (na Ziemi) wynosi $v_I = 11{,}2$ km/s.

W dobie lotów kosmicznych sposoby na uniesienie się z Ziemi wykorzystują wiele „trików” technicznych. Rakieta startująca z Ziemi na Księżyc była ogromna, o wysokości 110 metrów i o masie startowej 3 tys. ton. Musiała ona wynieść na orbitę dookoła Księżyca lądownik i moduł powrotny, który „parkował” na orbicie dookoła Księżyca. Z samego Księżyca startował już niewielki lądownik, o masie 4,7 tony, z czego 2,5 tony stanowiło paliwo niezbędne do dotarcia do modułu krążącego na orbicie parkingowej.

Dziś więc I i II prędkość kosmiczna mają bardziej znaczenie poznawcze niż praktyczne: pierwszą z nich obliczamy z równości siły grawitacji i siły dośrodkowej na orbicie o promieniu równym promieniowi Ziemi, drugą – z pracy niezbędnej do wyniesienia określonego ciała z odległości równej promieniowi Ziemi do nieskończoności.



Fot. 1.15. II prędkość kosmiczna dla Ziemi wynosi 11,2 km/s natomiast dla Księżyca tylko 2,38 km/s. Wystartowanie w kosmos z Księżyca jest więc o wiele łatwiejsze niż z Ziemi; **a)** Rakieta Saturn startująca z Ziemi miała wysokość 110 m i masę na starcie 3 tys. ton; **b)** lądownik księżycowy miał wysokość niecałe 10 metrów (łącznie z łapami) i masę startową 4,7 tony[19] (Źródło: NASA)

[19] Zob. materiały filmowe NASA nt. startu lądownika Apollo 17 z Księżyca na stronie ZDF UMK.

Wyrażenie (1.28) jest natomiast niezwykle ważne: wskazuje ono, jak obliczyć energię potencjalną E ciała w polu grawitacyjnym Ziemi, w odległości R od jej środka a niekoniecznie przy jej powierzchni. Energia ta wynosi

$$\boxed{E(R) = -\frac{GMm}{R}} \tag{1.32}$$

Energia potencjalna ciała znajdującego się w polu grawitacyjnym jest *ujemna*. Wynosi ona *zero* w nieskończoności, ale aby wynieść ciało do nieskończonej odległości, trzeba nad nim wykonać pracę. Jeśli nad ciałem wykonaliśmy pracę, to jego energia wzrosła.

W życiu codziennym ujemny znak energii potencjalnej w polu grawitacyjnym nie ma dla nas większego znaczenia. I tak interesują nas *względne* zmiany energii. Zresztą, wzór (1.32) nie jest w sprzeczności ze wzorem stosowanym na co dzień do obliczeń energii potencjalnej, tj. (1.24). We wzorze $E = mgh$ energia rośnie ze wzrostem wysokości h, we wzorze (1.32) energia również rośnie, jeśli $R_2 > R_1$. Rzeczywiście, różnica $E(R_2) - E(R_1)$ obliczona według wzoru (1.32) jest dodatnia, czyli $E(R_2) > E(R_1)$.

$$E(R_2) - E(R_1) = -GMm\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) > 0 \tag{1.33}$$

Wzór (1.32) na energię w (przyciągającym) polu grawitacyjnym będzie nam natomiast bardzo, bardzo przydatny przy modelowaniu atomu wodoru w następnym rozdziale.

Pytania (według podstawy programowej MEN):

1. Jaka jest interpretacja I prędkości kosmicznej? Oblicz ją.
2. Oblicz okres obiegu Wenus dookoła Słońca. Odległość Wenus od Słońca i masę Słońca znajdziesz w tabeli 4.1 w rozdziale IV.
3. Oblicz, z jaką prędkością musi latać satelita do pomiarów kształtu kuli ziemskiej („GOCE”), jeśli jego orbita jest zaledwie 150 km na powierzchnią Ziemi.
4. (rozszerzone) Jaka jest interpretacja II prędkości kosmicznej? Oblicz ją.
5. Oblicz drugą prędkość kosmiczną dla Marsa. Dane Marsa znajdziesz w tabeli 4.1.
6. (trudne) Oblicz, w jednostkach przyspieszenia ziemskiego g, jakie jest przyspieszenie dośrodkowe (tzn. w kierunku Ziemi) Księżyca, rys. 1.1. Przyjmij odległość Kuby od środka Ziemi 6 tys. km, przyspieszenie Kuby równe g a odległość środka Księżyca od środka Ziemi jako 380 tys. km. Wynik podaj w przybliżeniu ułamka prostego. (Skorzystaj umiejętnie ze wzoru 1.3.)