1.7. Ruch po okręgu i grawitacja

Uzbrojeni w znajomość sił działających w ruchu po okręgu możemy wrócić do modelu Kopernika z rys. 1.2. Jak to się dzieje, że planety na dalszych orbitach poruszają się wolniej? Wynika to z równowagi sił: rolę siły *dośrodkowej* w ruchu planet pełni siła *grawitacji*. To było chyba najważniejsze spostrzeżenie Izaaka Newtona dla całej fizyki. Powtórzmy jego rozumowanie.

Szukamy, jaki jest okres obiegu planety, znajdującej się w określonej odległości od Słońca (np. Ziemia, R = 150 mln km). Załóżmy, że znamy masę Słońca ($M = 2\cdot10^{30}$ kg)

Przyrównajmy wzór na siłę dośrodkową (1.10) ze wzorem na siłę oddziaływania grawitacyjnego Słońce – Ziemia.

$$\boxed{F = m\frac{\mathrm{v}^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}} \tag{1.13}$$

gdzie przez m oznaczyliśmy masę planety.

Przekształcając powyższe równanie (upraszczając przez m/R) otrzymujemy

$$\mathrm{v}^2 = G\frac{M}{R} \tag{1.14}$$

Wynik ten jest bardzo ciekawy. Po pierwsze, im planeta dalej od Słońca (większe R) tym porusza się wolniej (jej prędkość liniowa jest mniejsza). Po drugie, prędkość ruchu planet nie zależy od ich masy, a jedynie od masy Słońca.

Prędkość poruszania się planety w kosmosie jest trudna do zmierzenia; znacznie łatwiej, za Kopernikiem, zmierzyć *okres* jej obiegu. Zależność między okresem obiegu T a prędkością liniową znajdziemy wiedząc, że w ciągu jednego okresu planeta zatacza pełny okrąg, czyli przebywa drogę $2\pi R$. Mamy więc zależność

$$2\pi R = \mathrm{v}T \tag{1.15}$$

skąd otrzymujemy

$$\mathrm{v} = \frac{2\pi R}{T} \tag{1.16}$$

Podstawiając tę zależność do równania (1.14) dostajemy

$$\left(\frac{2\pi \mathrm{R}}{\mathrm{T}}\right)^2 = G\frac{M}{R} \tag{1.17}$$

skąd po przekształceniach mamy

$$\boxed{R^3 = G\frac{M}{4\pi^2}T^2} \tag{1.18}$$

lub krócej

$$\boxed{\frac{R^3}{T^2} = const} \tag{1.19}$$

Zapisaliśmy powyższe prawo w specjalnej ramce, aby podkreślić, że było to jedno z najważniejszych odkryć w historii astronomii. Równanie (1.17) mówi rzecz następującą.

Kwadraty okresów obiegu planet dookoła Słońca mają się do siebie jak sześciany ich odległości od Słońca.

Tę zależność nazywamy trzecim prawem Keplera.

Johannes Kepler (1571-1630) odkrył to prawo doświadczalnie; dzięki Newtonowi potrafimy je uzasadnić teoretycznie.

Przykład 1.5

Obliczmy, jak się mają do siebie okresy obiegu Ziemi i Saturna dookoła Słońca. Saturn (♄) znajduje się od Słońca w odległości R_h (w przybliżeniu) dziesięć razy większej niż Ziemia[13]. Okres obiegu dookoła Słońca T_h w jednostkach lat ziemskich obliczymy zapisując prawo (1.19) w postaci

$$\frac{R_h^3}{T_h^2} = \frac{R_\oplus^3}{T_\oplus^2} \tag{1.20}$$

gdzie przyjmiemy odległość Ziemia – Słońce $R_\oplus=1$ i okres obiegu (w latach) dla Ziemi $T_\oplus=1$.

Stąd mamy, podstawiając dokładną wartość liczbową $R_h=9{,}54$

$R_h^3 = T_h^2 = 868$

czyli $T_h = \sqrt{868} = 29{,}5$ lata.

Jest to wynik bardzo podobny do danych Kopernika, który podawał okres obiegu Saturna na 30 lat, zob. fot. 1.2. i odpowiadający dokładnej wartości, na stan z roku 2000.

Przykład 1.6

Obliczmy, z dokładnością do 3 cyfr znaczących, ile wynosi obieg Ziemi dookoła Słońca. Masa Słońca wynosi w przybliżeniu $2\cdot10^{30}$ kg a odległość Ziemia – Słońce $150\cdot10^{9}$ m.

Skorzystamy z przekształconego wzoru (1.18)

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM} = \frac{4\cdot(3{,}14)^2\cdot(150\cdot10^9)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot2\cdot10^{30}} = 997{,}8\cdot10^{10}$$

stąd T w sekundach wynosi $316\cdot10^6$ s, a co zamienione na dni (przyjmując bardzo niedokładnie, że dzień ma 24 godziny) daje 365,5 dnia. Wynik całkiem dobry, biorąc pod uwagę przyjęte przybliżenia stałej grawitacji, masy Słońca i odległości Ziemia – Słońce.

Trzecie prawo Keplera stosuje się nie tylko do układu Słońce – planety ale także do Ziemi i Księżyca lub satelitów Jowisza[14]. W szczególności stosuje się do sztucznych satelitów Ziemi. Masą w równaniu (1.18) jest w tym przypadku masa Ziemi. Poszukajmy, w jakiej odległości od środka Ziemi należy umieścić na orbicie satelitę, aby jego okres obiegu Ziemi wynosił 24 godziny. Innymi słowy, na jakiej wysokości latają satelity *geostacjonarne*[15]?

Przykład 1.7

Na jakiej wysokości od środka Ziemi znajdują się satelity geostacjonarne? Przyjąć masę Ziemi $M = 59\cdot10^{23}$ kg a dobę jako 24 godziny[16].

Dane: $M = 59\cdot10^{23}$ kg
$T = 24\text{h} = 24\cdot3600\ \text{s} = 86400\ \text{s}$

Skorzystamy z równania (1.18).

$$R^3 = G\frac{M}{4\pi^2}T^2 = 6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{59\cdot10^{23}}{4\cdot(3.14)^2}(86400)^2 = 74{,}5\cdot10^{21}$$

Stąd otrzymujemy, za pomocą kalkulatora, $R = 4{,}2\cdot10^7$ km.

[13] Zob. dane w jakiejkolwiek encyklopedii astronomicznej (podajemy tzw. „półoś wielką")
[14] Więcej o satelitach Jowisza w rozdziale IV.
[15] Satelity geostacjonarne tzn. takie, które widać z Ziemi zawsze w tym samym położeniu niezależnie od tego, że Ziemia się kręci, są np. satelity telewizyjne. Krążą one dookoła Ziemi w płaszczyźnie równika.
[16] Jak wyjaśnimy w rozdziale IV, okres obrotu Ziemi wokół własnej osi jest o 4 minuty krótszy niż 24 godzin.

Satelity geostacjonarne (np. telewizyjne) latają w odległości 42 tys. km od środka Ziemia. Przyjmując, że promień Ziemi to 6,3 tys. km, satelity geostacjonarne latają ok. 36 tys. km nad powierzchnią Ziemi. Dla porównania, satelita do pomiarów pola grawitacyjnego Ziemi (GOCE) lata na wysokości zaledwie 150 km nad powierzchnią Ziemi.

Zadanie 1.7: Oblicz okres obiegu trzeciego z dużych satelitów Jowisza (Ganimedesa). Masa Jowisza wynosi $1900 \cdot 10^{23}$ kg i odległość Ganimedesa od środka Jowisza 1 mln km. Stałą grawitacji przyjmij $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Porównaj wynik z wartością obserwowaną $T = 7{,}1$ dnia.

1.8. Grawitacja – loty kosmiczne

W 1865 r. francuski pisarz powieści fantastyczno-naukowych, Juliusz Verne wyobrażał sobie lot ludzi na Księżyc w pocisku wystrzelonym z gigantycznej armaty[17]. Mimo, że w locie na Księżyc (100 lat później) użyto rakiety, fizycy rozważają hipotetyczną prędkość, jaką należałoby nadać pociskowi, aby mógł okrążyć Ziemię, zob. rys. Kuby na ryc.1.14.

Fot. 1.14. (**a**) Wyjaśnienie I i II prędkości kosmicznej: wystrzelony pocisk z armaty okrąża Ziemię - I prędkość kosmiczna lub z Ziemi odlatuje oddalając się w nieskończoność – II prędkość kosmiczna (rys. Kuba Garbacz); (**b**) schemat „prawdziwego" lotu na Księżyc, misji Apollo (Źródło: NASA)

Problem 1.8 Jaką prędkość należy nadać pociskowi wystrzelonemu poziomo, aby okrążył Ziemię?

Pocisk ma krążyć po orbicie kolistej dookoła Ziemi, niewiele nad jej powierzchnią. Przyjmiemy jako promień jego orbity promień Ziemi, R = 6370 km. Rolę siły dośrodkowej spełniać ma siła grawitacji, obliczona ze wzoru (1.1) dla odległości R

$$F = G\frac{Mm}{R^2} \quad ,$$

gdzie tym razem M oznacza masę Ziemi a m masę pocisku. Siła grawitacji ma być równa sile dośrodkowej (równanie 1.10)

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{\mathrm{v}^2}{R}$$

Masa pocisku m upraszcza się i otrzymujemy następującą równość

$$\mathrm{v}^2 = G\frac{M}{R} \tag{1.21}$$

[17] W podobny sposób miał podróżować bohater innej powieści, z XVIII wieku, Baron Münchhausen.