1.3. Ruch po okręgu – przyspieszenie dośrodkowe

Znamy dwa szczególne, modelowe przypadki ruchu – ruch jednostajny, jak na przykład toczącej się po poziomym stole kulki i ruch jednostajnie przyspieszony, na przykład kulki staczającej się po równi pochyłej. Jeszcze innym, specjalnym rodzajem ruchu jest kamień kręcący się na sznurku ze stałą prędkością.

Atrybutem ruchu jednostajnego *prostoliniowego* jest stałość prędkości. Wiemy, że prędkość oprócz wartości ma określony kierunek. W ruchu jednostajnym prostoliniowym i wartość i *kierunek* wektora prędkości pozostają stałe. W ruchu przyspieszonym prędkość się zmienia. Zmiany prędkości w czasie nazywamy przyspieszeniem.

<u>Przykład 1.2</u>

Pociąg podmiejski rusza ze stacji i w ciągu 100 sekund osiąga prędkość 10 m/s (czyli 36 km/h). Jakie jest (średnie) przyspieszenie pociągu w ciągu tych 10 sekund?

<u>Rozwiązanie</u>

Zgodnie z definicją, przyspieszenie a jest równe ilorazowi zmiany prędkości $\Delta \mathrm{v}$ do przedziału czasu Δt , w jakim ta zmiana miała miejsce.

$$a = \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t} \tag{1.4}$$

Podstawiając wartości liczbowe uzyskujemy

$$a = \frac{100 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = 10 \text{ m/s}^2$$

Średnie przyspieszenie pociągu, czyli zmiana jego prędkości odniesiona do jednej sekundy wynosi 10 m/s w ciągu sekundy, w skrócie a = 10 (m/s)/s.

Obydwa przykłady ruchu, wyżej wspomniane, dotyczą ruchu *prostoliniowego*. Jeżeli ruch nie jest prostoliniowy, to sprawy się nieco komplikują. Wynika to z tego, że prędkość (i przyspieszenie) są **wektorami**, czyli w ich opisie musimy uwzględnić *kierunek*. I tak w ruchu jednostajnym *prostoliniowym* nie tylko *wartość* prędkości jest stała ale i jej *kierunek*. W ruchu jednostajnie *przyspieszonym* prostoliniowym nie tylko *wartość* przyspieszenia jest stała, ale i *kierunek* tego przyspieszenia. Ruch po okręgu jest inny.

Szczególnym przypadkiem ruchu po okręgu jest taki ruch, w którym *wartość* prędkości pozostaje stała. Przykładem takiego ruchu jest karuzela; również w ruchu Ziemi dookoła Słońca wartość prędkości pozostaje prawie stała[5].

Fot. 1.3. Kręcąca się karuzela lub skrzydła wiatraka przetwarzającego energię kinetyczną wiatru na energię elektryczną są dobrymi przykładami ruchu obrotowego ze stałą prędkością.

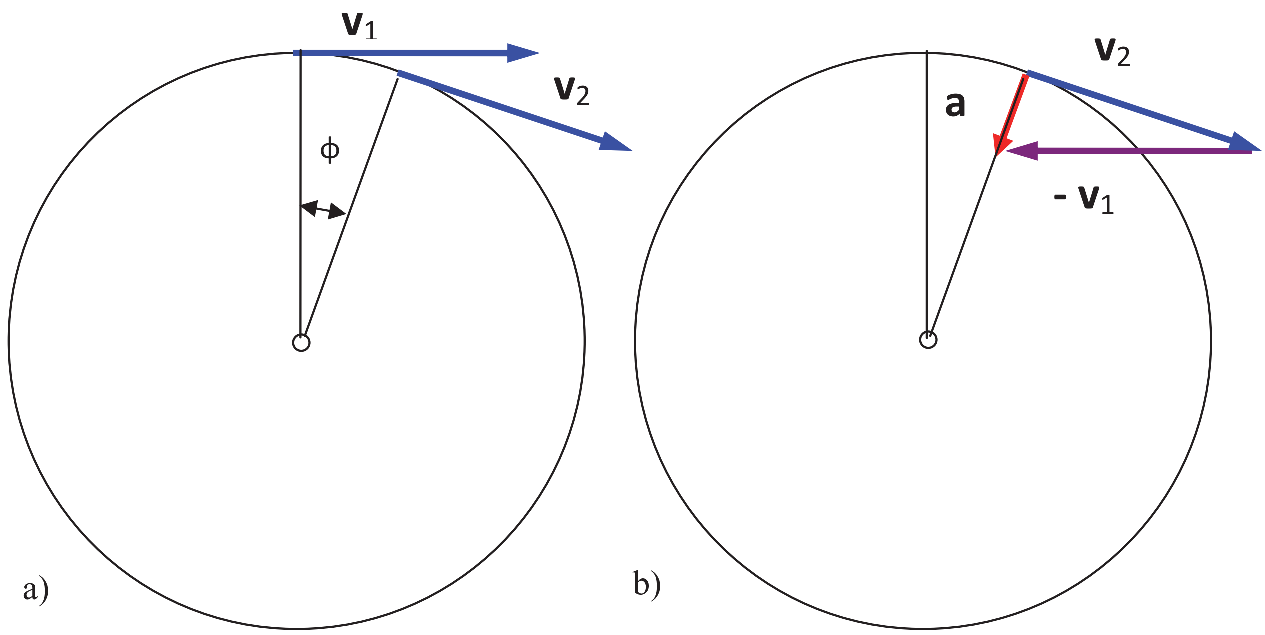
[5] Ruch Marsa dookoła Słońca nie jest już tak dobrym przykładem ruchu jednostajnego po okręgu jak ruch Ziemi.

Stała wartość prędkości nie oznacza jednak, że w ruchu po okręgu nie występuje przyspieszenie. Aby się o tym przekonać, musimy odwołać się do dokładniejszej definicji przyspieszenia niż w równaniu (1.4). Definicja ta musi uwzględniać fakt, że prędkość jest wektorem. Formalnie, dokładną definicję przyspieszenia możemy zapisać jako

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \tag{1.5}$$

W powyższym równaniu pogrubiona czcionka **v** i ***a*** oznaczają, że te dwie wielkości są wektorami (czas *t* – nie jest wektorem).

Formalny zapis jak w równaniu (1.5) nie daje prostej recepty na obliczenie przyspieszenia[6]. Spróbujmy zastanowić się, ile wynosi przyspieszenie w ruchu *jednostajnym*[7] po okręgu. Skorzystamy w tym celu z rysunku 1.4.



Rys. 1.4. a) Aby znaleźć przyspieszenie w ruchu jednostajnym po okręgu badamy, jak wygląda wektor prędkości $\mathbf{v}_1$ w określonej chwili a jak wygląda ten sam wektor (teraz narysowany jako $\mathbf{v}_2$) po upływie czasu Δt; **b)** przyspieszenie znajdujemy z różnicy wektorów ($\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$); w tym celu do wektora $\mathbf{v}_2$ dodajemy wektor ($-\mathbf{v}_1$); różnica tych wektorów jest skierowana ku środkowi okręgu: przyspieszenie ciała poruszającego się jednostajnie po okręgu jest przyspieszeniem *dośrodkowym.*

Jak widać z rys. 1.4 prędkość ciała w ruchu po okręgu jest w każdym punkcie prostopadła do promienia tego okręgu: w poszczególnym momentach czasu kierunek tej prędkości się zmienia. Jeżeli w pewnej chwili prędkość ta wynosi $\mathbf{v}_1$ to po czasie Δt prędkość będzie miała kierunek wektora $\mathbf{v}_2$. Przyrost prędkości $\Delta\mathbf{v}$ jest równy $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 + (-\mathbf{v}_1)$. Wektor $\Delta\mathbf{v}$ jest skierowany do *środka* okręgu, zob. rys. 1.4. Jeżeli obliczymy przyspieszenie ***a*** jako stosunek $\boldsymbol{a} = \Delta\mathbf{v}/\Delta t$, to jest ono również skierowane ku środkowi okręgu. Dochodzimy do bardzo ważnego wniosku.

W ruchu jednostajnym po okręgu przyspieszenie ciała jest skierowane ku środkowi okręgu. Przyspieszenie to nazywamy przyspieszeniem *dośrodkowym*.

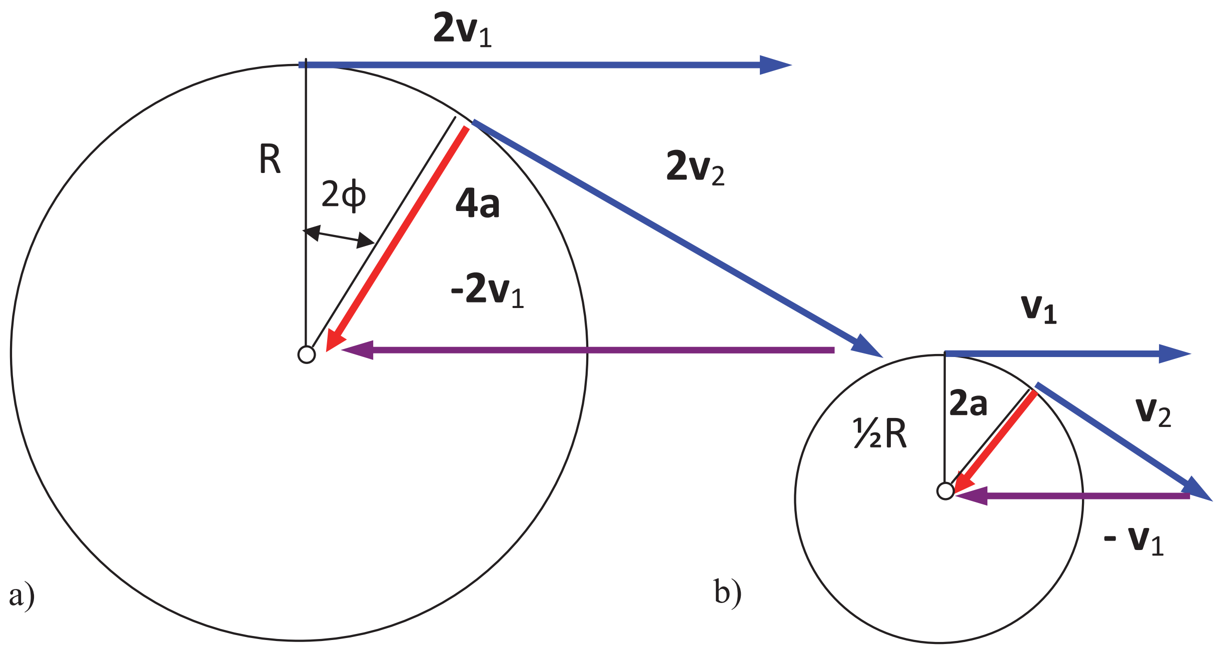
Od czego zależy przyspieszenie dośrodkowe? Na pewno od prędkości ruchu, ale nie tylko. Posłużymy się w tym celu kolejnym rysunkiem. Zbadamy, jak zmienia się przyspieszenie dośrodkowe, gdy zmienia się prędkość ruchu i gdy zmienia się promień okręgu, zob. rys. 1.5.

---

[6] Nie martw się, nawet studenci mają z tym kłopot! (Różniczkowanie wektorów wymaga wzorów Poissona.)
[7] Ruch po okręgu, w którym wartość prędkości pozostaje stała, będziemy nazywać ruchem „jednostajnym po okręgu".

Podwojenie prędkości, zob. 1.5[8] powoduje, że w tym samym czasie kąt zataczany przez poruszające się ciało podwaja się. Jednocześnie długość wektora prędkości podwaja się. Przyspieszenie rośnie więc czterokrotnie.

Ogólnie, przyspieszenie dośrodkowe rośnie jak kwadrat prędkości. Pokonywanie zakrętów z większą prędkością niż na to pozwalają znaki drogowe jest zatem bardzo niebezpieczne. Przykładowo, pokonanie zakrętu z prędkością 100 km/h zamiast zalecanej 70 km/h powoduje ponad dwukrotne zwiększenie przyspieszenia dośrodkowego (a przez to ryzyko „wypadnięcia" samochodu z drogi, szczególnie na mokrej szosie).



Rys. 1.5. Przyspieszenie dośrodkowe zależy od prędkości i promienia okręgu *R*; **a)** podwojenie prędkości powoduje czterokrotny wzrost przyspieszenia - w tym samym czasie ciało zatacza dwukrotnie większy kąt; **b)** zmniejszenie promienia okręgu do ½R powoduje podwojenie przyspieszenia. Rysunek ma charakter przybliżony.

Zmniejszenie o połowę promienia okręgu, przy tej samej wartości prędkości, powoduje podwojenie zatoczonego kąta w jednostce czasu. Przyspieszenie, zob. czerwony wektor na rys. 1.5b. rośnie więc dwukrotnie. Im mniejszy promień okręgu, tym większe przyspieszenie dośrodkowe poruszającego się ciała. Z tego powodu kierowcy Formuły 1 „ścinają" zakręty – pokonują je nie po okręgu o wyznaczonym, małym promieniu ale o promieniu tak dużym, jak na to pozwala szerokość toru. Na zwykłej szosie byłoby to śmiertelnie niebezpieczne!

Bardzo ważna zależność na przyspieszenie dośrodkowe *a* w ruchu jednostajnym po okręgu wyraża się więc wzorem

$$\boxed{a = \frac{\mathrm{v}^2}{R}} \quad , \tag{1.6}$$

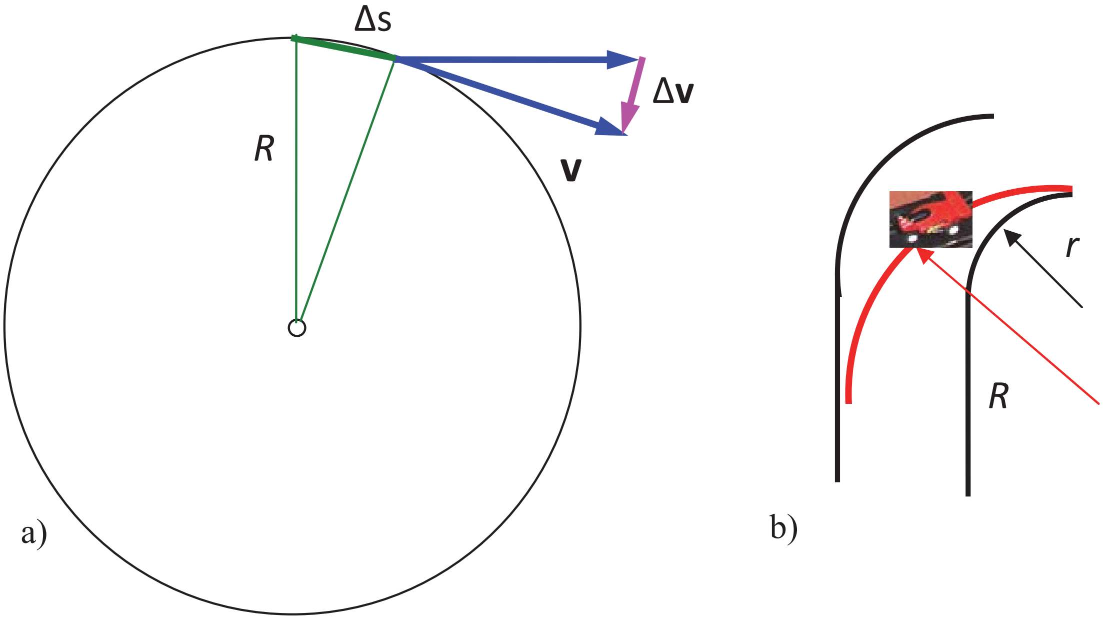
gdzie v jest prędkością (liniową) ruchu po okręgu a *R* promieniem okręgu.

Przyspieszenie dośrodkowe nie zależy w szczególności od masy ciała. Podobnie jak to ze spadkiem swobodnym i tarciem, *ryzyko* wypadnięcia z drogi samochodu osobowego i ciężarowego jest takie samo, o ile pokonują one zakręt z tą samą prędkością.

[8] Rysunek 1.5 jest z konieczności niedokładny. Dla obliczenia przyspieszenia powinniśmy rozważać małe kąty a kąty przedstawione na rysunku takimi nie są. Siłą rzeczy boki trójkątów prędkości „rozchodzą się".

Wyprowadzenie wzoru (1.6) - fakultatywne

Dokładne wyprowadzenie wzoru (1.6) wymaga (prostych) rozważań geometrycznych i jest przedstawione na rysunku 1.6. Droga Δs przebyta w jednostce czasu Δt wynosi $\Delta s = \mathrm{v}\Delta t$ i jest wycinkiem okręgu. Dla małych Δt możemy ją przybliżyć za pomocą odcinka linii prostej.



Rys. 1.6. Przyspieszenie dośrodkowe w ruchu jednostajnym po okręgu. **a)** Wyprowadzenie wzoru $a = \mathrm{v}^2/R$: trójkąt utworzony przez dwa promienie R i odcinek drogi Δs (zielony) jest podobny do trójkąta prędkości (wektory niebieskie) – stąd $\Delta s/R = \Delta \mathrm{v}/\mathrm{v}$; podstawiając $\Delta s = \mathrm{v}\Delta t$ przekształcamy $\Delta \mathrm{v}/\Delta t = \mathrm{v}^2/R = a$; **b)** kierowca Formuły 1 „ścina" zakręt – w ten sposób promień R, po którym się porusza, jest większy niż promień zakrętu r i przy pokonywaniu zakrętu występuje mniejsze przyspieszenie dośrodkowe (innymi słowy, można pokonać zakręt z większą prędkością).

Trójkąt utworzony przez dwa promienie R i odcinek Δs (zaznaczony kolorem zielonym na rys. 1.6) i trójkąt utworzony przez wektory prędkości są podobne, więc stosunki długości odpowiednich boków są takie same. Wynika stąd związek

$$\frac{\mathrm{v}\Delta t}{R} = \frac{\Delta \mathrm{v}}{\mathrm{v}} \tag{1.7}$$

Przekształcając ten wzór otrzymujemy

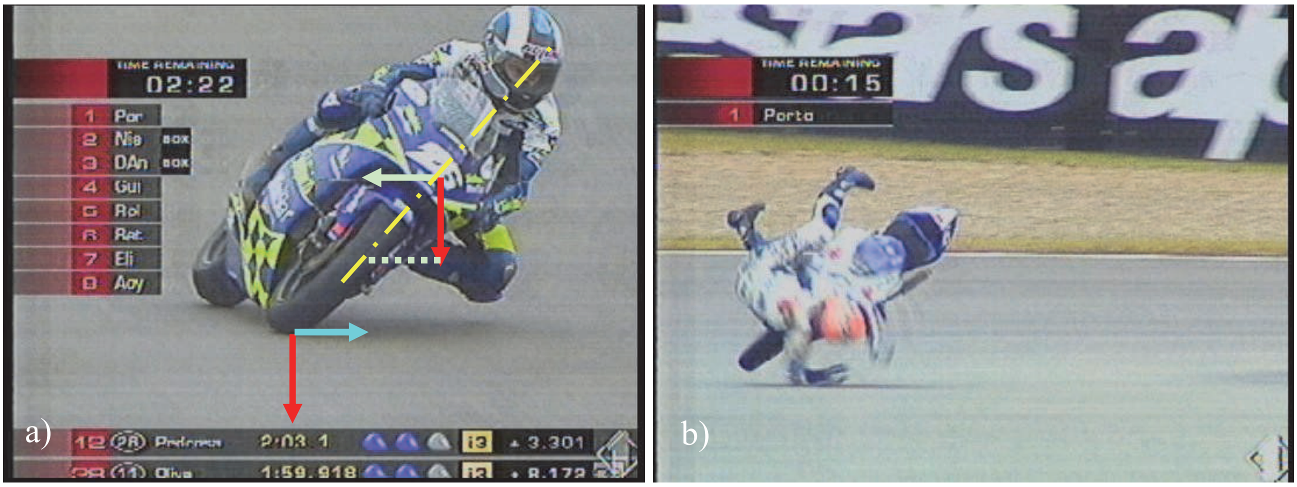
$$\frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{v}^2}{R} \tag{1.8}$$

czyli poszukiwany wzór na przyspieszenie $a = \dfrac{\mathrm{v}^2}{R}$. Nie zapisujemy w tym wzorze przyspieszenia jako wektora, mimo że nim jest, gdyż pamiętamy, że wektor a jest prostopadły w każdym momencie do wektora v (i do trajektorii ruchu).

Jest to niezwykle ważna właściwość ruchu jednostajnego po okręgu. Z tej prostopadłości wynika, że planety nie spadają na Słońce a poruszają się, teoretycznie, ruchem wiecznym.

Dlaczego? Wiemy, z definicji pracy, że jest ona równa iloczynowi przesunięcia i siły, która to przesunięcie powoduje, ale tylko wzdłuż przesunięcia[9]. Jeżeli siła działa prostopadle do przesunięcia, a tak jest w ruchu po okręgu, to siła *nie wykonuje* pracy. Siła grawitacji, pełniąca w ruchu planet rolę siły dośrodkowej, jest prostopadła do kołowej trajektorii, więc nie wykonuje pracy. Jeżeli nad planetami nie jest wykonywana praca, to z prawa zachowania energii wynika, że *energia* ruchu planet nie zmienia się. Ruch jest wieczny!

[9] Zob. np. *Toruński poręcznik do fizyki. Gimnazjum klasa I.* Wydawnictwo Naukowe UMK, 2010 str. 85.



Rys. 1.7. Pokonywanie zakrętów jest szczególnie niebezpieczne na motocyklach – duża masa kół powoduje, że efekt żyroskopowy jest duży i dla skrętu trzeba pochylić motocykl. **a)** Źródłem siły dośrodkowej jest siła tarcia szosy o oponę (strzałka niebieska), jest ona *niewiększa* niż siła *nacisku* opon na szosę (a ta równa ciężarowi motocyklisty i motocykla, strzałka czerwona); na motocyklistę działa też siła odśrodkowa bezwładności (jasnozielona) – suma tych dwóch sił wyznacza kierunek pochylenia motocykla; **b)** jeśli z powodu nadmiernej szybkości siła dośrodkowa przekroczy *możliwą* największą wartość siły tarcia, motocykl (żyroskopowo) utrzymuje swój kierunek ruchu ale dla motocyklisty skutki są bolesne! [źródło: TV Italia 1]

1.4. Ruch po okręgu – siła dośrodkowa

W poprzednim paragrafie pokazaliśmy, że z ruchem po okręgu wiąże się *przyspieszenie* dośrodkowe. Jeżeli takie przyspieszenie występuje, musi ono mieć swoją przyczynę, czyli *siłę*. Siłę powodującą ruch po okręgu nazywamy *siłą dośrodkową*. Co jest przyczyną siły dośrodkowej?

Rys. 1.8. Siła dośrodkowa jako przyczyna ruchu po okręgu. **a)** Na pochylonym torze rowerowym jest nią nie tyle siła tarcia opon o tor (jak w wyścigach motocyklowych) co siła wypadkowa (żółta) będąca sumą siły ciężkości (czerwonej) i siły reakcji toru (niebieskiej); **b)** w przyspieszaczu elektronów (tzw. synchrotronie) źródłem siły dośrodkowej zakrzywiającej tor elektronów jest odpowiednio ukształtowane pole magnetyczne; nie cały tor elektronów jest zakrzywiony – tylko tam, gdzie są magnesy [źródło: RAI, DESY]

Przyczyn siły dośrodkowej może być tyle, ile przyczyn sił „zwykłych”. Dla kuli na końcu sportowego „młota” jest to siła, z którą ciągnie tę kulę miotacz (rys. 1.10a), dla planet jest to siła grawitacji ze strony Słońca, dla motocykla i samochodu na zakręcie jest to siła tarcia (rys. 1.7a), dla roweru na pochylonym torze jest to również składowa siły reakcji toru, (rys. 1.8a), dla cząstek elementarnych w centrum badań jądrowych CERN jest to pole magnetyczne