Inne rozwiązania zadań z algebry

Zad. Sprawdź czy relacja $R \subset N \times N$ (N-zbiór liczb naturalnych), określona przez $mRn \Leftrightarrow 2|(n + m)$ jest relacją równoważności. Jeśli tak, to znajdź zbiór ilorazowy.

Rozwiązanie:

Musimy sprawdzić, czy relacja R jest zwrotna, symetryczna i przechodnia:

- *zwrotność* $\forall_{x \in N} : xRx$
  Relacja jest zwrotna ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej zachodzi $2|(x + x)$.

- *symetryczność* $\forall_{x,y \in N} : xRy \Rightarrow yRx$
  Relacja jest symetryczna ponieważ dla dowolnej pary liczb naturalnych, z prawa przemienności dodawania wynika, że jeżeli zachodzi relacja $xRy = 2|(x + y)$ to również musi zachodzić relacja $yRx = 2|(y + x)$.

- *przechodniość* $\forall_{x,y,z \in N} : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
  Jeżeli zachodzą $xRy = 2|(x + y)$ oraz $yRz = 2|(y + z)$, to $x + y = 2k$, $y + z = 2l$ dla pewnych $k, l \in N$. Stąd wynika, że $(x + z) = 2\,(k + l - y)$, czyli zachodzi również $xRz = 2|(x + z)$. Zatem relacja R jest przechodnia.

Klasą abstrakcji dowolnego elementu $a \in N$ względem relacji R jest zbiór $[a]_R$ wszystkich liczb naturalnych o tej samej parzystości co a. Możemy zatem wyodrębnić dwie klasy abstrakcji dla danej relacji R:

- $K_1 = [0]_R = [2]_R = [4]_R = ... = \{x : x = 2n,\ n \in N_0\}$ - liczby naturalne parzyste
- $K_2 = [1]_R = [3]_R = [5]_R = ... = \{x : x = 2n+1,\ n \in N_0\}$ - liczby naturalne nieparzyste

Zbiór ilorazowy to zbiór wszystkich klas abstrakcji danej relacji równoważności: $N / R = \{K_1, K_2\}$.

Zad. Korzystając z tw. Kroneckera-Capellego sprawdź ile rozwiązań ma układ równań:

$$\begin{cases} -x-y+z+t=4, \\ x-y-z+t=0, \\ x-y-z-t=-8. \end{cases}$$

Przypomnienie:

Twierdzenie Kroneckera-Capellego:

Niech dany będzie układ równań liniowych $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$, gdzie rząd macierzy $\boldsymbol{A}$ typu m x n (co oznacza, że n jest liczbą niewiadomych, a m określa liczbę równań) wynosi r, a rząd macierzy rozszerzonej układu $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}]$ wynosi s. Układ ten ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r = s$.

Z twierdzenia wynika, że:

- jeżeli $r = s = n$ – rozwiązanie układu wyznaczone jest jednoznacznie. Taki układ nazywamy oznaczonym.

- jeżeli $r = s < n$ – układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od n - r parametrów. Taki układ nazywamy nieoznaczonym.

- układ nie ma rozwiązań, kiedy rząd macierzy głównej nie jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej. Taki układ nazywamy sprzecznym.

Rozwiązanie:

- Zapisujemy rozpatrywany układ równań w postaci macierzowej $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

  Liczba równań $m = 3$, liczba niewiadomych $n = 4$.

- Tworzymy macierz rozszerzoną $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}]$:

$$U = \left[\begin{array}{cccc:c} -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -8 \end{array}\right]$$

- Wykonując operacje elementarne na wierszach macierzy $\boldsymbol{U}$ sprowadzamy ją do postaci schodkowej w celu wyznaczenia jednocześnie rzędów macierzy $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{U}$:

Do wiersza drugiego dodajemy wiersz pierwszy:

$$U \overset{w_2+w_1}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{cccc:c} -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -8 \end{array}\right]$$

Do wiersza trzeciego dodajemy wiersz pierwszy:

$$\overset{w_3+w_1}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{cccc:c} -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

Od wiersza trzeciego odejmujemy wiersz drugi:

$$\overset{w_3-w_2}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{cccc:c} -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{array}\right]$$

Uzyskana macierz schodkowa ma trzy niezerowe wiersze w części $\boldsymbol{A}$. Czyli rząd macierzy $\boldsymbol{A}$ jest równy rzędowi macierzy $\boldsymbol{U}$: $r = s = 3$. Zatem układ ma rozwiązania. Ponieważ r = s < n, układ jest nieoznaczony i ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru (n - r = 4 - 3 = 1).

- Przepisujemy układ równań korzystając ze schodkowej postaci macierzy $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{U}$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy:

$$\begin{cases} -x - y + z + t = 4, \\ -2y + 2t = 4, \\ -2t = -8. \end{cases}$$

Rozwiązując ostatni układ przez podstawienie i traktując x jako parametr otrzymamy następujące rozwiązanie:

$$\begin{cases} y = 2, \\ z = 2 + x, \\ t = 4. \end{cases}$$

Można sprawdzić dla kilku dowolnych wartości x, że powyższy wynik zawsze będzie rozwiązaniem rozpatrywanego układu równań.

Zad. Oblicz wyznacznik macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wykorzystując rozwinięcie Laplace'a.

Przypomnienie:

Zgodnie z rozwinięciem Laplace'a, wyznacznik macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ stopnia $n \geq 2$ jest równy sumie iloczynów elementów *i*-tego wiersza lub *j*-tej kolumny i ich dopełnień algebraicznych:

$$\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + ... + a_{in}D_{in} \text{ dla rozwinięcia względem } i\text{-tego wiersza}$$

$$\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + ... + a_{ni}D_{ni} \text{ dla rozwinięcia względem } j\text{-tej kolumny}$$

gdzie D_{ij} to dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} powstałe z przemnożenia czynnika $(-1)^{i+j}$ przez minor elementu a_{ij}.

Rozwiązanie:

Wybieramy liczbę wierzy lub kolumn z największą ilością zer – w tym przypadku jest to trzecia kolumna. Dokonujemy rozwinięcia Laplace'a wyznacznika względem niezerowych elementów trzeciej kolumny:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Wyznaczniki macierzy dopełnień (minory o wymiarach 3 x 3) liczymy metodą Sarrusa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (2 + 20 + 56) - (16 + 35 + 4) = 78 - 55 = 23$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (3 + 25 + 8) - (20 + 5 + 6) = 36 - 31 = 5$$

Po podstawieniu do rozwinięcia Laplace'a i kilku elementarnych obliczeniach dostajemy szukany wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{2+3} \cdot 23 + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot 5 = -92 + 5 = -87$$

Zad. W zależności od wartości parametru a rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x + y - az = -1 \\ ax + y + az = 4 \\ 4x + y + 4z = a \end{cases}$$

Rozwiązanie

Jest to układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi x, y i z oraz parametrem a.

Do jego rozwiązania możemy posłużyć się np. metodą wyznaczników (wzory Cramera). Obliczmy wyznacznik główny:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 1 & a \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -a^2 + 3a + 4.$$

Układ posiada jedno rozwiązanie, gdy wyznacznik główny jest różny od zera, tj.
(po otrzymaniu rozwiązań równania kwadratowego $-a^2 + 3a + 4 = 0$) dla $a \neq -1$ i $a \neq 4$.

Obliczmy teraz dalsze wyznaczniki (kolumnę współczynników kolejno przy x, y i $z$zastępujemy kolumną wyrazów wolnych – z prawej strony układu równań):

$$W_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -a \\ 4 & 1 & a \\ a & 1 & 4 \end{vmatrix} = -3a - 20, \quad W_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ a & 4 & a \\ 4 & a & 4 \end{vmatrix} = -a^3 - a^2 + 16a + 16,$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 4 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 16.$$

Mamy tym samym określoną postać rozwiązania dla przypadków $a \neq -1$ i $a \neq 4$ (zgodnie z wzorami Carmera): $x = \frac{Wx}{W}$, $y = \frac{W_y}{W}$, $z = \frac{Wz}{W}$.

Pozostaje nam sprawdzić dwa inne przypadki:

1) Układ nieoznaczony (nieskończenie wiele rozwiązań) mielibyśmy wtedy, gdy wszystkie cztery wyznaczniki się zerują. Ponieważ wiemy już, że dla głównego wyznacznika jest to możliwe jedynie dla $a = -1$ lub $a = 4$, łatwo sprawdzić, że dla żadnej z tych dwóch liczb nie otrzymamy wszystkich wyznaczników równych zero. Nie jest zatem możliwe, by układ był nieoznaczony.
2) Sprawdzając wartości wyznaczników dla $a = -1$ lub $a = 4$, zapewne zauważyliście, że w pierwszym przypadku ($a = -1$) otrzymamy $W_y = 0$, ale przy niezerowych pozostałych dwóch wyznacznikach, zaś w drugim ($a = 4$) mamy co prawda $W_z = 0$, ale pozostałe dwa są różne od zera.
   Jest to cechą układu sprzecznego (brak rozwiązań).

Podsumowując powiemy, że rozważany układ ma jedno rozwiązanie dla $a \neq -1$ i $a \neq 4$ oraz jest układem sprzecznym (nie ma rozwiązań) przy $a = -1$ lub$a = 4$.

Zad. Sprawdź, czy podane macierze są do siebie wzajemnie odwrotne:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{8} & -\frac{17}{8} & \frac{1}{8}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Krótkie wyjaśnienie

Załóżmy, że macierz A jest macierzą kwadratową stopnia n. Mówimy, że macierz B tego samego wymiaru jest macierzą odwrotną do A, jeżeli spełniona jest równość:
$A\cdot B=B\cdot A=I$.

Uwaga:Macierz A jest odwracalna, czyli posiada macierz odwrotną, wtedy i tylko wtedy, gdy jej wyznacznik jest różny od zera, czyli jest ona tzw. macierzą nieosobliwą.

Rozwiązanie:

a) Obliczymy iloczyn$A\cdot B$:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}3-2 & -6-6\\ 1-1 & -2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -12\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$, czyli $A\cdot B\neq I$, a więc podane macierze nie są do siebie wzajemnie odwrotne. Oczywiście nie *musimy* już obliczać drugiego z iloczynów podanych w definicji macierzy odwrotnej.

b) Podobnie jak powyżej, obliczymy iloczyn:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}+\frac{3}{4} & -\frac{3}{4}-\frac{17}{4}+5 & -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{3}{4}+\frac{3}{4} & \frac{9}{4}-\frac{17}{4}+2 & \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}+\frac{3}{4} & -\frac{2}{4}+\frac{2}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\\ -\frac{3}{8}+\frac{3}{8} & \frac{6}{8}+\frac{2}{8} & \frac{15}{8}-\frac{17}{8}+\frac{2}{8}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

zatem podane macierze są do siebie wzajemnie odwrotne.

Zad. Wyznacz macierz odwrotną:

a)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix},$$

b)

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

<u>*Krótkie wyjaśnienie*</u>

Aby wyznaczyć macierz odwrotną do A, wykonujemy następujące czynności:

1) *Obliczamy wyznacznik macierzy A; jeśli* $\det A = 0$, to *macierz odwrotna nie istnieje,*
2) *Jeślidet $A \neq 0$, to obliczamy dopełnienia algebraiczne wszystkich wyrazów macierzy A (dopełnieniem algebraicznym wyrazu a_{ij} macierzy A nazywamy wyznacznik podmacierzy powstałej z A przez wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny, pomnożony przez liczbę$(-1)^{i+j}$) dopełnienie algebraiczne wyrazu a_{ij} będziemy oznaczać przezA_{ij}.*
3) *Tworzymy macierz dopełnień:*

   $$D=\left[A_{ij}\right]_{i,j=1,\dots,n},$$

4) *Wyznaczamy macierz transponowaną do D*
5) *Macierzą odwrotną do A jest macierz*

   $$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot D^T$$

Rozwiązanie:

a) Najpierw obliczymy wyznacznik macierzy$A$:

$$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-6=-5\neq 0$$

, zatem A jest odwracalna.

Obliczymy teraz dopełnienia algebraiczne wszystkich wyrazów tej macierzy:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 1=1,$$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2$,

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3$,

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$.

Zauważmy, że w tym przypadku dopełnienia algebraiczne wyrazów są wyznacznikami macierzy wymiaru 1×1, czyli zawierającej tylko jeden wyraz. Taki wyznacznik jest równy temu wyrazowi.

Macierz *D* ma więc postać :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

zatem

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

i otrzymujemy wreszcie macierz

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Aby sprawdzić poprawność wykonanych obliczeń, możemy obliczyć odpowiednie iloczyny:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} + \frac{6}{5} & \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} & \frac{6}{5} - \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} + \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} + \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5} & \frac{6}{5} - \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

zatem otrzymaliśmy poprawny wynik.

b)

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = 0 + 0 + 6 - 0 - (-1) - (-3) = 10 \neq 0$$

Zatem istnieje macierz odwrotna do$A$. Obliczymy dopełnienia algebraiczne wszystkich wyrazów macierzy$A$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3) = 3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1 - 2) = 3,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1 - 6) = 7,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

Otrzymujemy stąd macierz

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -3 \end{bmatrix},$$

następnie

$$D^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

i wreszcie

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Wykonamy jeszcze sprawdzenie:

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 1+3+6 & -3+1+2 & -1+7-6 \\ -3+3 & 9+1 & 3-3 \\ 3-3 & 1-1 & 7+3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = I,$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 1+9 & -1+1 & -2+3-1 \\ -3+3 & 3+7 & 6+1-7 \\ -3+3 & 3-3 & 6+1+3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = I$$

zatem wykonaliśmy poprawne obliczenia.

Opracowanie KR