Zad. 13 (wektory-1)

Wektor **a** tworzy z osią OX kąt 60°, a z osią OZ kąt 135°. Jaki jest kat pomiędzy wektorem **a** i osią OY?

Rozwiązanie

Skorzystamy z własności $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Wyprowadzenie tej relacji jest treścią oddzielnego zadania (poprzedniego na tej liście, nr 12), tutaj tylko krótki komentarz. Cosinusy kierunkowe wektora o współrzędnych [a,b,c] możemy wyrazić wzorami $\cos\alpha = a/l$, $\cos\beta = b/l$, $\cos\gamma = c/l$, gdzie l – długość wektora. Ponieważ $l^2 = a^2 + b^2 + c^2$, łatwo uzasadniamy prawdziwość tej własności.

Możemy więc obliczyć $\cos^2\beta = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\gamma = 1 - ¼ - ½ = 1/4$. Zatem $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta = 45°$.

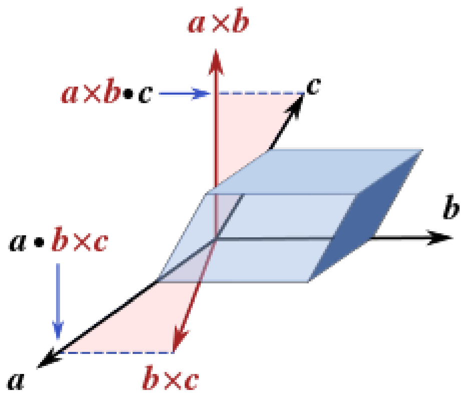
Zad. 15 (wektory-1)

Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach w punktach $L_1(0,0,1)$, $L_2(0,1,0)$, $L_3(-1,0,1)$ i $L_4(1,-1,0)$.

Rozwiązanie

W rozwiązaniach dwóch kolejnych zadań skorzystamy z ogólnych spostrzeżeń, dotyczących objętości brył rozpiętych na wektorach.

W dodatnio zorientowanym układzie współrzędnych iloczyn mieszany opisuje objętość równoległościanu rozpiętego przez dane trzy wektory (patrz rys. obok). Iloczyn mieszany można traktować jako jeszcze jedno oznaczenie wyznacznika: iloczyn mieszany trzech wektorów jest równy ich wyznacznikowi bądź wyznacznikowi macierzy stopnia 3 z wektorami zapisanymi w niej wierszowo bądź kolumnowo (transponowanie macierzy nie zmienia wyznacznika),

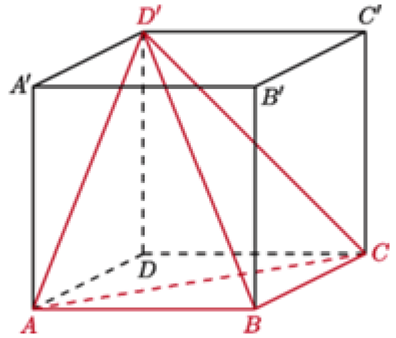


Jeśli $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, to

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

W rozwiązaniu kolejnego zadania skorzystamy z tej właśnie zależności, tu jednak zastanówmy się jeszcze nad związkiem między objętościami różnych brył: równoległościanu, ostrosłupa i czworościanu. Skorzystamy z poniższego rysunku. Jak wiemy ze szkolnej geometrii, objętość ostrosłupa ABCDD’ stanowić będzie 1/3 objętości graniastosłupa ABCDA’B’C’D’. Z kolei objętość czworościanu ABCD’ stanowi ½ objętości rozważanego przed chwilą ostrosłupa. Zatem do obliczenia objętości czworościanu możemy wykorzystać wzór:

V = 1/6 |det *A*|, gdzie wyznacznik *A* powstaje przez wpisanie w poszczególne wiersze współrzędnych wektorów wychodzących z jednego wierzchołka.



W naszym przykładzie:

$\mathbf{L_1L_2}$ = [0,1,-1]

$\mathbf{L_1L_3}$ = [-1,0,0]

$\mathbf{L_1L_4}$ = [1,-1,-1]

Otrzymamy V = 1/3.

Zad. 16 (wektory-1)

W punktach A(-2,-1,0) i B(-3,2,1) zaczepione są dwa wektory: **AC** = [2,-4,1] i **BD** = [0,-4,3]. Zbuduj równoległościan oparty na tych wektorach i oblicz jego objętość.

Rozwiązanie

Do określenia równoległościanu użyjemy trzech wektorów wychodzących z jednego punktu, np. A. Musimy tylko określić położenie punktu D (co jest możliwe w oparciu o współrzędne B i wektora **BD**): D(-3,-2,4). Wówczas:

AB = [-1,3,1]

AC = [2,-4,1]

AD = [-1,-1,4]

Wartość bezwzględna iloczynu mieszanego – czyli wyznacznika zbudowanego na podanych przed chwilą współrzędnych wektorów – daje nam szukaną objętość: V = 18.

Zad. 17 (wektory-1)

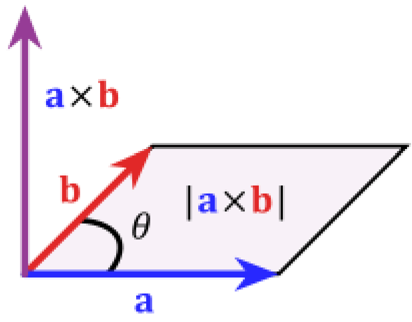
Wektory **AB** = [0,-4,0], **AC** = [0,0,-4], **AD** = [4,0,0] tworzą krawędzie pewnego czworościanu. Oblicz pole powierzchni tego czworościanu.

Rozwiązanie

Powierzchnie czworościanu stanowią trójkąty.

Jak wiadomo, miarą pola powierzchni trójkąta (czyli połowy równoległoboku zbudowanego na wektorach – patrz rysunek obok) może być połowa wartości iloczynu wektorowego dla odpowiedniej pary wektorów.

Wystarczy więc obliczyć odpowiednie iloczyny wektorowe i po podzieleniu ich wartości przez 2 dokonać zsumowania.



Dla każdej pary podanych wektorów wynikiem mnożenia wektorowego jest wektor o długości 16. Pola powierzchni ścian ABC, ABD i ACD są więc równe 8, ich suma – 24. Pozostaje jeszcze ściana BCD – musimy określić tworzące ją wektory, np. **BC** = **AC** – **AB** = [0,4,-4] oraz **BD** = **AD** – **AB** = [4,4,0]. Wynikiem pomnożenia wektorowego **BC** i **BD** jest wektor [16,-16,-16] o długości $16\sqrt{3}$. Pole powierzchni ściany BCD wynosi więc $8\sqrt{3}$, a całe pole powierzchni czworościanu – $P = 24 + 8\sqrt{3}$.

Zad. 436 (wektory-2)

Wykazać, że (2**a** + **b**) × (**a** + 2**b**) = 3**a** × **b**.

Rozwiązanie

W przypadku działań na wektorach stosujemy również uniwersalne prawa działań na wyrażeniach algebraicznych, przy czym istotne jest zachowanie porządku tych działań (iloczyn wektorowy nie jest przemienny, ponieważ **a** × **b** = - **b** × **a**). Dodatkowo warto zauważyć, że iloczyn wektorowy w przypadku mnożenia przez ten sam wektor (np. **a** × **a** lub **b** × **b** daje zero (gdyż sinus kąta między takimi wektorami wynosi zero).

Otrzymujemy więc: (2**a** + **b**) × (**a** + 2**b**) = 2**a** × **a** + 4**a** × **b** + **b** × **a** +2**b** × **b** = 3**a** × **b** (ponieważ **b** × **a** = - **a** × **b**).

Zad. 437 (wektory-2)

Obliczyć pole równoległoboku zbudowanego na wektorach **a** = **m** + 2**n** i **b** = 2**m** + **n**, gdzie **m** i **n** są wektorami jednostkowymi tworzącymi ze sobą kąt 30°.

Rozwiązanie

Pole równoległoboku zbudowanego na wektorach można określić jako wartość iloczynu wektorowego **a** × **b**. Korzystając z uwag przedstawionych w poprzednim rozwiązaniu, obliczamy:

a × **b** = (**m** + 2**n**) × (2**m** + **n**) = 2**m** × **m** + **m** × **n** + 4**n** × **m** +2**n** × **n** = -3**m** × **n**.

Ponieważ **m** i **n** to wektory jednostkowe, wartość iloczynu wektorowego **m** × **n**, zgodnie z definicją, wyniesie m·n·sin 30°, czyli ½ (gdyż m = n = 1). Ostatecznie | **a** × **b** | = 3/2. Taka jest też szukana wartość pola równoległoboku.

Zad. 440 (wektory-2)

Wykazać, że punkty A(2,-1,-2), B(1,2,1), C(2,3,0) i D (5,0,-6) leżą w jednej płaszczyźnie.

Rozwiązanie

Skorzystamy tu z własności liniowej zależności wektorów: punkty A,B,C i D mogą leżeć w jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy wektory **AB**, **AC** i **AD** są liniowo zależne (a więc wyznacznik macierzy, której wierszami są współrzędne tych wektorów, wynosi zero).

Obliczamy współrzędne wektorów:

AB = [-1,3,3], **AC** = [0,4,2], **AD** = [3,1,-4]

i obliczamy wartość wyznacznika opartego na tych wektorach – det |A| = 16+18-36+2 = 0. Skoro wektory **AB**, **AC** i **AD** są liniowo zależne, możemy jeden z nich przedstawić jako kombinację liniową dwóch pozostałych (patrz rozwiązanie zad. 441 poniżej), a to znaczy, że punkty A, B, C i D leżą w jednej płaszczyźnie.

Zad. 441 (wektory-2)

Wykazać, że wektory **a** = -**i** +3**j** +2**k**, **b** = 2**i** -3**j** -4**k** i **c** = -3**i** +12**j** +6**k** są komplanarne (współpłaszczyznowe) i rozłożyć wektor **c** na składowe o kierunkach wektorów **a** i **b**.

Rozwiązanie

Stosując metodę podobną do przedstawionej w rozwiązaniu zad. 440 powyżej, obliczamy wyznacznik macierzy 3×3, utworzonej na współrzędnych wektorów ustawionych wierszami: [-1,3,2], [2,-3,-4] i [-3,12,6] – det |A| = 18+48+36-18-48-36 = 0. Potwierdziliśmy więc współpłaszczyznowość wektorów.

Rozłożymy teraz wektor **c** na składowe o kierunkach wektorów **a** i **b**: **c** = α**a** + β**b**, po rozpisaniu otrzymujemy układ równań:

$-3 = -\alpha + 2\beta$

$12 = 3\alpha - 3\beta$

$6 = 2\alpha - 4\beta$,

w którym niezależne są dwa pierwsze równania (ostatnie powstaje przez obustronne wymnożenie pierwszego przez liczbę -2). Rozwiązanie układu daje $\alpha = 5$, $\beta = 1$.

Zatem **c** = 5**a** + **b**.