Zad. 4.1 Oblicz $\sqrt[3]{-1}$

Rozwiązanie:

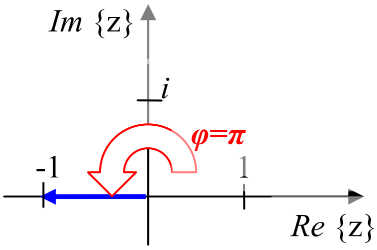
W zbiorze liczb rzeczywistych istnieje jedno rozwiązanie $\sqrt[3]{-1} = -1$ gdyż $(-1)^3 = -1$

Ale w zbiorze liczb zespolonych, pierwiastków może być więcej: sprawdźmy to!

Aby znaleźć rozwiązanie w zbiorze liczb zespolonych zapiszmy liczbę -1 w postaci Eulera.

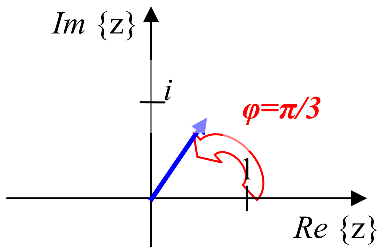
$$z = |z| e^{i\varphi}$$

$$z = -1 = 1e^{i\pi}$$



Pierwiastek trzeciego stopnia obliczamy korzystając z tej postaci

a) $\sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3} = (e^{i\pi})^{1/3} = e^{i\pi/3} = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$



Kąt φ = π/3 = 60º, jak na powyższym rysunku.

Ogólnie, powinny istnieć *trzy* pierwiastki zespolone trzeciego stopnia. Znajdziemy pozostałe dwa, korzystając z *okresowości funkcji trygonometrycznych* (i funkcji $e^{i\varphi}$). [np. $\sin\varphi = \sin(\varphi + 2n\pi)$]

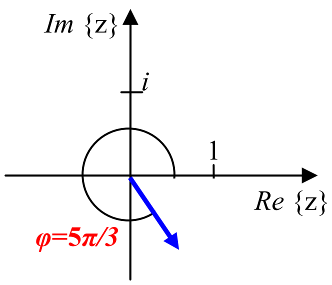
b) $\sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3} = (e^{i(\pi+2\pi)})^{1/3} = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + 0i = -1$

jest to już znaleziony pierwiastek rzeczywisty

c)

$$\sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3} = (e^{i(\pi+4\pi)})^{1/3} = e^{i5\pi/3} = \cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3}) = \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) + i\sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) =$$

$$= \cos(\frac{\pi}{3}) - i\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Sprawdzenie c)

$$\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 2i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}\right) = -1$$

Opracowanie: GK