Podstawy logiki

Co to jest zdanie?
W matematyce za zdanie przyjmuje się wyłącznie stwierdzenie, któremu można przypisać wartość logiczną: 1 - zdaniu prawdziwemu, 0 - fałszywemu.
Przykład:
- Trójkąt jest figurą geometryczną. - zdanie logiczne, prawdziwe
- Warszawa jest stolicą Polski. - zdanie logiczne, prawdziwe
- $2 < 3$ - zdanie logiczne, prawdziwe
- Istnieje największa liczba naturalna. - zdanie logiczne, fałszywe
- Idź do sklepu. - zdanie nielogiczne
- W pięciokąt można wpisać okrąg. - zdanie nielogiczne, ponieważ nie wiadomo, o jakim pięciokącie jest mowa, więc nie można jednoznacznie określić wartości logicznej.

Na ogół do oznaczania zdań używa się małych liter: p, q, r, s, t, x, y, z itp.

Spójniki i tabele logiczne

Negacja: oznaczana jest symbolem "$\neg$" (czasami " $\sim$ "). Zmienia ona wartość logiczną następującego po nim zdania na przeciwną. "$\neg p$" czytamy jako "nieprawda, że p" lub krócej "nie p".

Przykład: „*p*": 2·2 = 4 "$\neg p$": 2·2 ≠ 4 (Uwaga: zaprzeczeniem relacji > jest ≤ , zaś np. zaprzeczeniem ≥ jest relacja <)

Alternatywa: symbol - " $\vee$ ". Zdanie $r \equiv p \vee q$ jest prawdziwe, gdy co najmniej 1 ze zdań, między którymi występuje " $\vee$ " jest prawdziwe. "$p \vee q$" czytamy "p lub q".

Przykład: $p \equiv$ "8 jest liczbą parzystą." $q \equiv$ "$2 < 8$"

Zdanie $p \vee q$ wygląda tak: "8 jest liczbą parzystą lub $2 < 8$."

Koniunkcja: Symbol - $\wedge$ ("i"). Zdanie $r = p \wedge q$ jest prawdziwe wyłącznie wtedy, gdy zarówno p, jak i q są prawdziwe.

Przykład: *p*: 6+7=13, *q*: 20 jest liczbą całkowitą; wówczas koniunkcja zdań *p* i *q*: 6+7=13 i 20 jest liczbą całkowitą.

Implikacja: symbol- " $\Rightarrow$ " ("to"). Zdanie $r \equiv p \Rightarrow q$ jest fałszywe wyłącznie, gdy p jest prawdziwe, a q fałszywe.

Przykład: Jeżeli 3>1, to 2<1 (oba zdania prawdziwe, całość też prawdziwa).

Równoważność: symbol- " $\Leftrightarrow$ ". $r \equiv p \Leftrightarrow q$ jest prawdziwe, gdy p i q mają tę samą wartość logiczną.
Przykład: Rozpatrujemy liczbę ze zbioru liczb rzeczywistych. $p \equiv$ "$x = 1$", $q \equiv$ "$x^2 = 1$", $p \Leftrightarrow q \equiv$ "$x = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2 = 1$".

Czasami również mówi się o **alternatywie wykluczającej** oznaczanej jako "$\underline{\vee}$" ("albo"). Ma podobne znaczenie do zwykłej alternatywy, z tą różnicą, że wyklucza przypadek, gdy oba zdania są prawdziwe.

Dla lepszego zobrazowania można używać tabelek logicznych reprezentujących wartość logiczną dla poszczególnych elementów tego zdania.

Dla podanych przed chwilą działań prezentują się one tak:

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Zdania mogą być o wiele bardziej złożone i może występować więcej zdań, np.: $(p \vee q) \Rightarrow \neg(r \Rightarrow s)$ itp. Oczywiście wtedy tabelki są dużo bardziej rozbudowane.

Zad. 1. Sprawdź, czy wyrażenie: $(p \Rightarrow q) \vee \neg(q \Rightarrow \neg p)$ jest tautologią.

<u>Tautologią</u> nazywamy zdanie, które bez względu na wartość logiczną zdań zawierających zawsze przybiera wartość logiczną 1. W celu sprawdzenia czy dane zdanie nią jest, sporządzamy tabelkę analogiczną do prezentowanych powyżej. Gdy na końcu wychodzą same jedynki, to zdanie jest tautologią (tu odpowiedź jest negatywna – patrz poniższa tabelka, przykład tautologii – zad.2).

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow \neg p$	$\neg(q \Rightarrow \neg p)$	$(p \Rightarrow q) \vee \neg(q \Rightarrow \neg p)$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1

Zad. 2. Czy wyrażenie $(p \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow q)$ jest tautologią?

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$r \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow q)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

Zad. 3. Ocenić wartość logiczną zdań:
a) $2|6 \Rightarrow 2 > 3$ (zapis $a|b$ oznacza "a dzieli b")

$2|6$ - zdanie jest prawdziwe (6 jest podzielne przez 2),
$2 > 3$ - zdanie jest fałszywe
Zatem mamy sytuację $1 \Rightarrow 0$. Patrzymy do tabelki dla implikacji i dajemy odp.

Odp.: Zdanie jest fałszywe.

b) $(3|12 \wedge 4|12) \Rightarrow \sqrt{2} < 1$

$3|12$ - prawda
$4|12$ - prawda
$(3|12 \wedge 4|12$ - (patrzymy na tabelkę: $1 \wedge 1$) - prawda
$\sqrt{2} < 1$ - fałsz
$(3|12 \wedge 4|12) \Rightarrow \sqrt{2} < 1$ - (patrzymy na tabelkę $1 \Rightarrow 0$) - fałsz

Odp.: Zdanie jest fałszywe.

c) $[(2|3 \vee 8 + 5 < 17 \vee 11 < 9) \Rightarrow \pi < 3] \vee 2 > 0$

Sprawdzanie wszystkich składowych zdania nie jest konieczne. Wystarczy zauważyć, że zdanie składa się z 2 głównych części:

1) $(2|3 \vee 8 + 5 < 17 \vee 11 < 9) \Rightarrow \pi < 3$
2) $2 > 0$
połączonych spójnikiem "lub". Druga część jest prawdziwa. Patrzymy na tabelkę spójnika $\vee$ i dochodzimy do wniosku, że bez względu na wartość logiczną 1. części całość i tak jest prawdziwa.

Odp.: Zdanie jest prawdziwe.