Zadanie: Wyrazić w prostszej formie (tzn. w postaci wymagającej prostszych obliczeń) następujące iloczyny:

(a) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\right)=\vec{a}\cdot\left[\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)\vec{c}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{d}\right]=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right).$

(b) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{d}\right)\vec{c}-\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right)\vec{d}$

(c)

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}+\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\vec{c}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}+\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}-\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\vec{b}=\vec{0}$$

(d)

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{d}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)=\left(\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\right)\cdot\vec{a}-\left(\vec{d}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right)\cdot\vec{a}-\left(\vec{c}\times\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)\right)\cdot\vec{a}=\ldots$$

$$=\vec{a}\cdot\left[\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)\vec{c}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{d}+\left(\vec{c}\cdot\vec{d}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)\vec{c}-\left(\vec{c}\cdot\vec{d}\right)\vec{b}+\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{d}\right]=0$$

Zadanie: Wykazać słuszność następującej relacji: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left[\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\right]=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]^2$

Przypomnienie: $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ to iloczyn mieszany (skalar).

Pokażemy, że lewa strona relacji da się przekształcić do prawej:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left[\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\right]=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left[\left(\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}\right)\vec{c}-\left(\underbrace{\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{c}}_{\text{iloczyn skalarny dwóch prostopadłych wektorów = 0}}\right)\vec{a}\right]=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}\right)\vec{c}=\ldots$$

$$=\left[\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right]\left[\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]^2.$$

Zadanie: Dane są wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Znaleźć wektor $\vec{c}$ spełniający relacje: $\vec{c}\times\vec{a}=\vec{b}$ i $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$.

Pomnóżmy wektorowo obie strony pierwszego równania przez $\vec{a}$:

$$\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}$$

Stąd

$$\vec{a}\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)-\vec{c}a^2=\vec{b}\times\vec{a}$$

Po uwzględnieniu drugiego równania otrzymamy:

$$\vec{c}=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{a^2}$$

Zadanie: Dane są niezerowe wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ oraz parametry liczbowe α i β. Wyznacz wektory $\vec{x}$ i $\vec{y}$ spełniające układ równań:

$$\begin{cases} \alpha\vec{x} + \vec{y}\times\vec{c} = \vec{a} \\ \beta\vec{y} + \vec{x}\times\vec{c} = \vec{b} \end{cases}$$

Pomnóżmy obie strony równań skalarnie i wektorowo przez wektor $\vec{c}$.

$$\begin{cases} \alpha\vec{x}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \beta\vec{y}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \alpha\left(\vec{x}\times\vec{c}\right) + \left(\vec{y}\times\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{c} \\ \beta\left(\vec{y}\times\vec{c}\right) + \left(\vec{x}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\times\vec{c} \end{cases} \quad (2)$$

Przekształcając układ (2) otrzymujemy:

$$\begin{cases} \alpha\left(\vec{x}\times\vec{c}\right) + \vec{c}\left(\vec{y}\cdot\vec{c}\right) - \vec{y}c^2 = \vec{a}\times\vec{c} \\ \beta\left(\vec{y}\times\vec{c}\right) + \vec{c}\left(\vec{x}\cdot\vec{c}\right) - \vec{x}c^2 = \vec{b}\times\vec{c} \end{cases} \quad (3)$$

Z układu(1) mamy $\vec{x}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}/\alpha$ oraz $\vec{y}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c}/\beta$, natomiast z układu wyjściowego $\vec{y}\times\vec{c} = \vec{a} - \alpha\vec{x}$ oraz $\vec{x}\times\vec{c} = \vec{b} - \beta\vec{y}$. Podstawiając te związki do układu (3) otrzymujemy:

$$\vec{x} = \frac{\vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) + \alpha\beta\vec{a} - \alpha\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)}{\alpha^2\beta + \alpha c^2}$$

$$\vec{y} = \frac{\vec{c}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right) + \alpha\beta\vec{b} - \beta\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)}{\alpha\beta^2 + \beta c^2}.$$