1.5. Iloczyn wektorowy.

Definicja 1.12

Niech $\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ oraz $\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Iloczynem wektorowym wektorów $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ oraz $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$ nazywamy wektor $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} .= (a_2b_3 - b_2a_3)\boldsymbol{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{k}$

Skrótowo można iloczyn wektorowy zapisać w postaci wyznacznika:

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$. Poniżej podano też metodę Sarrusa obliczenia takiego wyznacznika.

Praktyczne zastosowanie w rozwiązaniu zadania na str. 22.

Przykład 1.6

Znaleźć $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ jeśli $\boldsymbol{a} = [2, -1, 6]^t$ i $\boldsymbol{b} = [-3, 5, 1]^t$.

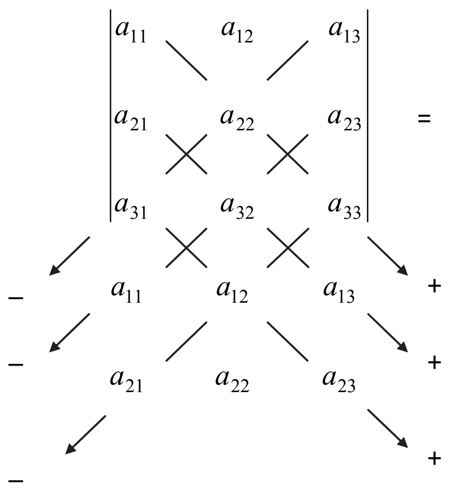
Rozwiązanie

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} =$$

$= (-1 - 30)\boldsymbol{i} - (2 + 18)\boldsymbol{j} + (10 - 3)\boldsymbol{k} = -31\boldsymbol{i} - 20\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k} = [-31, -20, 7]^t$. □

Metoda Sarrusa

Wyznacznik trzeciego stopnia można obliczyć stosując skróconą metodę zwaną **metodą (regułą) Sarrusa**. Metoda ta odnosi się tylko i wyłącznie do wyznaczników stopnia trzeciego. Polega ona na dopisaniu pod odpowiadającą obliczanemu wyznacznikowi macierzą pierwszy, a potem drugi wiersz (alternatywą jest dopisanie po prawej stronie pierwszej, a następnie drugiej kolumny), przez co otrzymujemy następujący schemat:



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Twierdzenie 1.3

Wektor $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ jest ortogonalny do wektorów $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$.

Dowód: Wystarczy wykazać, że $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a} = 0$ oraz $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b} = 0$.

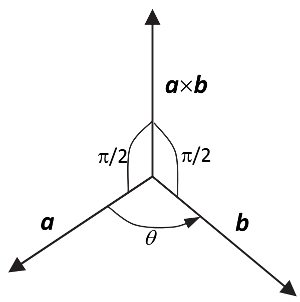
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3 =$$

$= (a_2b_3 – b_2a_3)a_1 - (a_1b_3 – b_1a_3)a_2 + (a_1b_2 – b_1a_2)a_3 =$

$= a_2b_3\, a_1 - b_2a_3a_1 - a_1b_3\, a_2 + b_1a_3a_2 + a_1b_2\, a_3 - b_1a_2a_3 = 0.$

Podobnie dowodzimy, że $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b} = 0$. □

W interpretacji geometrycznej, rys. 11.6, twierdzenie 11.3 pokazuje, że jeśli wektory $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ zaczepione są w jednym punkcie, to iloczyn wektorowy $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Jego zwrot wyznaczony jest za pomocą reguły śruby prawoskrętnej: obracając wektor $\boldsymbol{a}$ w stronę wektora $\boldsymbol{b}$ zgodnie ze strzałką, wybieramy zwrot wektora $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ wskazany przez „wkręcanie się" śruby prawoskrętnej.
Iloczyn wektorowy, podobnie jak skalarny, może być użyty do wyznaczania kąta między wektorami.



Rys. 11.6

Twierdzenie 1.4

Jeśli θ jest kątem między dwoma niezerowymi wektorami $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, to
$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \sin\theta$

Z powyższego twierdzenia oraz z własności sin 0 = 0 wynika następujący wniosek.

Wniosek 1.3

Niezerowe wektory $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$

Iloczyn wektorowy ma następujące własności.

Twierdzenie 1.5

Jeśli $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ są dowolnymi wektorami, $\boldsymbol{0}$ jest wektorem zerowym, $m\neq 0$ jest skalarem, to:
a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}\times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$,
b) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$,
c) $(m\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = m(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (m\boldsymbol{b})$,
d) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$,
e) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$,
f) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$,
g) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} – (\boldsymbol{a} \cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

Zastosowania.

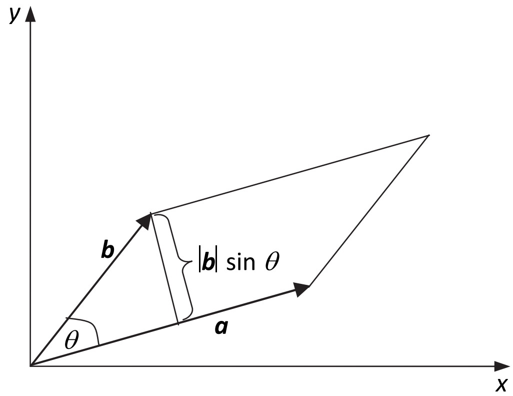
Twierdzenie 1.6

Pole równoległoboku, którego przyległymi bokami są wektory ***a*** i ***b***, jest równe P = $\lvert \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \rvert$.

Dowód.

Niech ***a*** i ***b*** będą przyległymi bokami równoległoboku, a θ niech będzie kątem między nimi, rys. 11.7. Ze wzoru na pole równoległoboku mamy:
P = $\lvert \boldsymbol{a} \rvert \; \lvert \boldsymbol{b} \rvert \sin \theta$.
Zatem zgodnie z twierdzeniem 11.4,

P = $\lvert \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \rvert$. □



Rys. 11.7

Przykład 1.6

Obliczyć pole równoległoboku, którego kolejnymi wierzchołkami są punkty o współrzędnych (2, 5, 3), (1, -1, 3) i (5, 4, 2).

Rozwiązanie

Mając trzy kolejne wierzchołki możemy utworzyć trzy równoległoboki. Ponieważ pole każdego równoległoboku jest równe podwojonemu polu trójkąta utworzonego przez trzy kolejne wierzchołki, zatem pola tych równoległoboków będą jednakowe. Wystarczy wyliczyć pole jednego z nich, np. równoległoboku, którego przyległymi bokami są wektory ***a*** o początku w punkcie (1, -1, 3) i końcu w punkcie (2, 5, 3) oraz ***b*** o początku w punkcie (1, -1, 3) i końcu w punkcie (5, 4, 2).
Wektory te maja następujące współrzędne.
$\boldsymbol{a} = (2 - 1)\boldsymbol{i} + (5 + 1)\boldsymbol{j} + (3 - 3)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = (5 - 1)\boldsymbol{i} + (4 + 1)\boldsymbol{j} + (2 - 3)\boldsymbol{k} = 4\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

Zatem

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -6\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 19\boldsymbol{k}$.

Zatem P = $\lvert \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \rvert = \sqrt{(-6)^2 + 1^2 + (-19)^2} = \sqrt{36 + 1 + 361} = \sqrt{398}$. □

Zad. Czy wektory [1,1,1], [0,1,1] i [1,0,0] są liniowo niezależne?

Wektory $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... $\mathbf{a}_n$ są liniowo niezależne, jeśli żaden z nich nie jest kombinacją liniową pozostałych, to znaczy nie istnieje taki zestaw liczb a_1, a_2, ... a_n, że
$\boldsymbol{a_i} = \sum_{j=1}^{n} a_j \boldsymbol{a_j}$ gdzie $j \neq i$.

Dla podanych trzech wektorów widać, że *nie* są one liniowo niezależne: pierwszy wektor jest sumą drugiego i trzeciego.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wektory są liniowo niezależne, gdy wyznacznik macierzy z nich utworzonej jest różny od zera. Sprawdźmy, że

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Przedstaw wektor **w**=[2,2,3] w postaci kombinacji liniowej wektorów **a**=[1,0,1], **b**=[0,1,1] i **c**=[1,0,0]

Sprawdźmy, czy podane trzy wektory są liniowo niezależne

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$ czyli te wektory są liniowo niezależne

Szukamy liczb a, b, c takich, że $a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c} = \mathbf{w}$

$$\text{czyli}\ a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Jest to układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi, a, b, c.

Możemy go zapisać jako

$a + c = 2$

$b = 2$ (*)

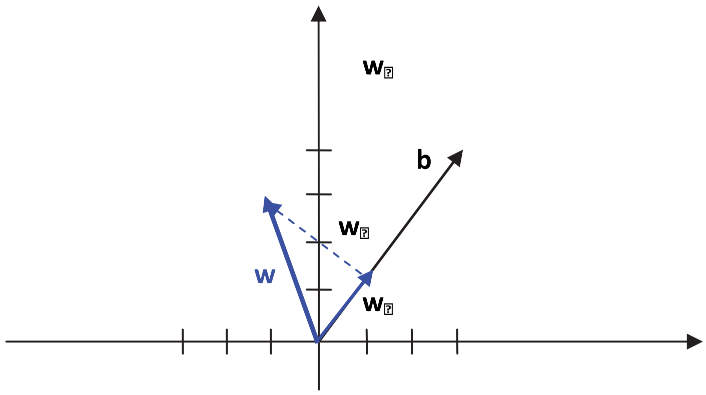
$a + b = 3$, skąd otrzymujemy $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$.

Sprawdzamy:

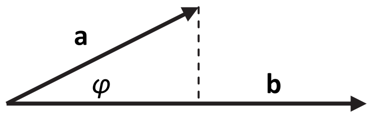
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Za pomocą kombinacji liniowej podanych tu wektorów **a**, **b**, **c** można przedstawić dowolny wektor w przestrzeni trójwymiarowej, mogą więc one stanowić *bazę* w takiej przestrzeni.

Zad. Dla wektora **w** = [- 1,3] znaleźć składową równoległą i prostopadłą do wektora **b** = [3,4]



Długość składowej równoległej $|\mathbf{w}_{\|}|$ znajdziemy z definicji iloczynu skalarnego.
Przypominamy



$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}| \cos \varphi$

Zauważmy, że $|\mathbf{a}|\cos\varphi$ to rzut wektora **a** na wektor **b** czyli

$|\mathbf{a}|\cos\varphi = (\mathbf{a} \circ \mathbf{b})/ |\mathbf{b}|$ (*)

Obliczmy dla podanych wektorów długość wektora **b**

$|\mathbf{b}| = \sqrt{(3^2+4^2)} = 5$

Iloczyn skalarny wektora **w** [-1 , 3]
i wektora **b** [3 , 4]

wynosi -3+12 = 9, czyli długość rzutu wektora **w** na wektor **b** wynosi ze wzoru (*) $|\mathbf{w}_{\|}|=9/5$.

Wektor $\mathbf{w}_{\|}$ znajdziemy mnożąc tę długość przez *wersor* (czyli wektor o długości 1) równoległy do wektora **b**

$\mathbf{w}_{\|} = \mathbf{w}_{\|} \cdot \mathbf{b}/|\mathbf{b}| = 9/25 \cdot [3,4] = [27/25 , 36/25]$ (porównaj na rysunku)

Ogólnie, wzór na wektor $\mathbf{a}_1$, będący składową wektora **a** równoległą do wektora **b** wynosi

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{a} \circ \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

Składową prostopadłą do wektora **b** znajdziemy jako różnicę między wektorem **w** i $\mathbf{w}_{\|}$
$\mathbf{w}_{\perp} = \mathbf{w} - \mathbf{w}_{\|} = [-1, 3] - [27/25 , 36/25] = [-52/25 , 39/25]$ (porównaj na rysunku)

Sprawdźmy, jeszcze czy wektory $\mathbf{w}_{\perp}$ i $\mathbf{w}_{\|}$ są prostopadłe, czyli $\mathbf{w}_{\perp} \circ \mathbf{w}_{\|} = 0$

$$-\frac{52}{25}\frac{27}{25} + \frac{36}{25}\frac{39}{25} = 0$$