Szczególnie przydatne w działaniach na wektorach są wersory związane z osiami kartezjańskiego układu współrzędnych.

W przestrzeni dwuwymiarowej są to wektory $\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ oraz $\boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, natomiast w przestrzeni trójwymiarowej $\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ oraz $\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Każdy wektor można przedstawić w postaci kombinacji liniowej odpowiednich wersorów.

Przykład 1.4

Zapisać wektory $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$ w postaci kombinacji liniowej odpowiednich wersorów.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 12\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 12\boldsymbol{k} \ \square$$

Widać stąd, że współrzędne wektora są zarazem współczynnikami tworzącej ten wektor kombinacji liniowej wersorów.

<u>1.4. Iloczyn skalarny wektorów.</u>

Definicja 1.10

Niech $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$. Iloczynem skalarnym wektorów $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ **<u>o tych samych wymiarach</u>** nazywamy:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^t \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Z powyższej definicji wynika, że iloczyn skalarny dwóch wektorów jest liczbą.

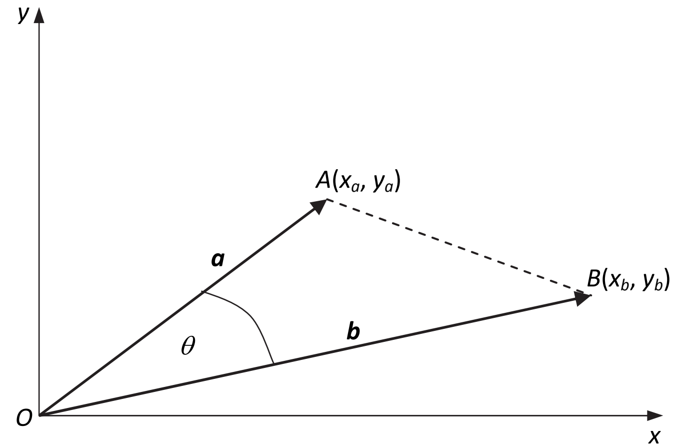
Niektóre własności iloczynu skalarnego:

Niech $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ będą wektorami i niech k będzie liczbą. Zachodzą następujące własności:
a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$,
b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$,
c) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$,
d) $(k\,\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = k\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot (k\boldsymbol{b})$,
e) $\mathbf{0} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Iloczyn skalarny jest często wykorzystywany do znajdowania kąta zawartego miedzy wektorami.

Definicja 1.11

Niech $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ będą wektorami niezerowymi zaczepionymi w jednym punkcie. Kątem między wektorami $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ nazywamy mniejszy z kątów wyznaczonych przez te wektory.



Rys. 11.4

Na rysunku 11.4, kąt miedzy wektorami $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ oznaczony jest symbolem θ.

Twierdzenie 1.1

Jeśli θ jest kątem miedzy niezerowymi wektorami $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, to:
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\ \cos\theta$

Dowód:
Jeśli $\boldsymbol{b} \neq k\,\boldsymbol{a}$, o znaczy jeśli wektory $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ nie są równoległe, to mamy sytuację przedstawioną na rys. 11.4. Stosując twierdzenie cosinusów do trójkąta AOB otrzymujemy:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2\,|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos\theta .$$

Zatem, podstawiając współrzędne poszczególnych wektorów, otrzymujemy:
$(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 = x_a^2 + y_a^2 + x_b^2 + y_b^2 - 2\,|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos\theta.$
Po podniesieniu nawiasów do kwadratu i zredukowaniu mamy:
$-2x_ax_b - 2y_ay_b = -2\,|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}| \cos\theta$, co po podzieleniu przez (-2) daje udowadnianą równość. □

Z powyższego twierdzenia wynikają ważne wnioski.

Wniosek 1.1

Jeśli θ jest kątem miedzy niezerowymi wektorami $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$, to:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

Wniosek 1.2

Dwa niezerowe wektory $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ są ortogonalne wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$.

Przykład 1.4
Sprawdzić ortogonalność wektorów:

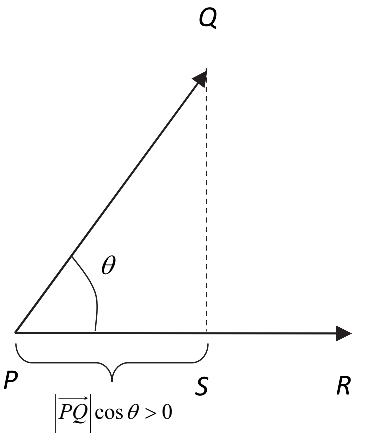
a) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

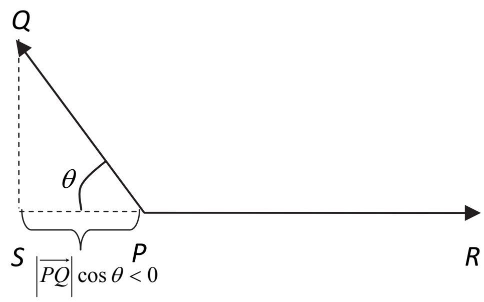
b) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -17 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie

a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) = 6 + 6 = 12$. Wektory nie są ortogonalne.

b) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (-3) \cdot 2 + 5 \cdot 8 + 2 \cdot (-17) = -6 + 40 - 34 = 0$. Wektory są ortogonalne. □





Rys. 11.5

Jeśli wektory $|\overrightarrow{PQ}|$ i $|\overrightarrow{PR}|$ są zaczepione w tym samym punkcie, i jeśli punkt S jest rzutem ortogonalnym punktu Q na prostą wyznaczoną przez punkty P i R, to skalar $|\overrightarrow{PQ}|\cos\theta$

będziemy nazywali **komponentem wektora** $|\overrightarrow{PQ}|$ **wzdłuż** $|\overrightarrow{PR}|$. Zauważmy, że $|\overrightarrow{PQ}|\cos\theta$ jest dodatni jeśli $0 \le \theta < \pi/2$ lub ujemny jeśli $\pi/2 < \theta \le \pi$. Dla $\theta = \pi/2$ komponent jest równy 0.

Zauważmy, że $|\overrightarrow{PQ}|\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PR}|}$ Wzór ten można zastosować do obliczania wartości pracy wykonanej przez siłę działającą pod kątem θ do kierunku ruchu przesuwanego ciała.

Załóżmy, że mamy do czynienia z sytuacją przedstawioną w pierwszej części rysunku 11.5, tzn. siła $\overrightarrow{PQ}$ przyłożona jest w punkcie *P* i powoduje przesunięcie tego punktu o wektor $\overrightarrow{PR}$. Wektor $\overrightarrow{PQ}$ jest sumą wektorów $\overrightarrow{PS}$ i $\overrightarrow{SQ}$, a wektor $\overrightarrow{SQ}$ jako prostopadły do kierunku przesunięcia nie wpływa na przesunięcie punktu *P*. Wykonana praca może więc być zapisana w postaci :

$$W = |\overrightarrow{PS}||\overrightarrow{PR}|,$$

gdzie

$$|\overrightarrow{PS}| = |\overrightarrow{PQ}|\cos\theta.$$

Stąd

$$W = |\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|\cos\theta = \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$$

Zatem

Twierdzenie 1.2

Praca wykonana przez stałą siłę $\overrightarrow{PQ}$, która spowodowała przesunięcie punktu przyłożenia siły o wektor $\overrightarrow{PR}$ jest równa iloczynowi skalarnemu wektorów $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$, $W = \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$.

Przykład 1.5.

Wartość i kierunek stałej siły wyrażone są za pomocą wektora $\boldsymbol{a} = [5 \quad 2 \quad 6]^t$. Obliczyć pracę wykonaną przez tę siłę podczas przesuwania pewnego ciała z punktu *P*(1, -1, 2) do punktu *R*(4, 3, -1).

Rozwiązanie.

Najpierw obliczamy współrzędna wektora $\overrightarrow{PR}$.
Otrzymujemy $\overrightarrow{PR}$ = $[3, 4, -3]^t$.
Zgodnie z twierdzeniem 11.2 wartością pracy jest:
$\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{PR} = 5\cdot3 + 2\cdot4 + 6\cdot(-3) = 5$.

Jeśli przesunięcie wyrażone było w metrach a siła w niutonach, to jednostką pracy jest dżul. Możemy więc powiedzieć, że wykonana została praca W = 5 J. □