1.3. Podstawowe działania na wektorach

Podamy definicje i własności działań na wektorach w przestrzeni dwuwymiarowej. Działania w przestrzeni trójwymiarowej definiowane są analogicznie i mają analogiczne własności.

Definicja 1.4

Mówimy, że wektory o tych samych wymiarach, $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$ są równe, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i = b_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definicja 1.5

Sumą wektorów o tych samych wymiarach, $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$ nazywamy wektor $\boldsymbol{c}$ taki, że

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \cdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Różnicą wektorów o tych samych wymiarach, $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$ nazywamy wektor $\boldsymbol{c}$ taki, że $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ \cdots \\ a_n - b_n \end{bmatrix} \end{bmatrix}$.

Iloczynem wektora $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$ przez stałą k nazywamy wektor $\boldsymbol{c}$ taki, że $\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ \cdots \\ ka_n \end{bmatrix}$.

Definicja 1.6

n wymiarowym wektorem zerowym nazywamy wektor $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Definicja 1.7

Wektorem przeciwnym do wektora $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$ nazywamy wektor - $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ \cdots \\ -a_n \end{bmatrix}$.

Zachodzą następujące własności.

a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
b) $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$
c) $\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}$,
d) $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$.

Definicja 1.8

Dwa niezerowe wektory $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ mają ten sam kierunek, jeśli istnieje taka niezerowa liczba k, że $\boldsymbol{a} = k\,\boldsymbol{b}$. Jeśli ponadto:
$k > 0$, to wektory te mają ten sam zwrot,
$k < 0$, to wektory te mają zwrot przeciwny.

Przykład 1.3

Niech $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.
Znajdź:
a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$,
b) $\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$,
c) $3\boldsymbol{a} - (3/2)\boldsymbol{b}$.

Rozwiązanie

a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1+4 \\ 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1-3\cdot 4 \\ 3-3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ -3 \end{bmatrix}$

c) $3\boldsymbol{a} - \frac{3}{2}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3(-1) - \frac{3}{2}\cdot 4 \\ 3\cdot 3 - \frac{3}{2}\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-6 \\ 9-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix}$ □

Definicja 1.9

Wersorem nazywamy wektor, którego długość jest równa 1.

Szczególnie przydatne w działaniach na wektorach są wersory związane z osiami kartezjańskiego układu współrzędnych.

W przestrzeni dwuwymiarowej są to wektory $\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ oraz $\boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, natomiast w przestrzeni trójwymiarowej $\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ oraz $\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Każdy wektor można przedstawić w postaci kombinacji liniowej odpowiednich wersorów.

Przykład 1.4

Zapisać wektory $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$ w postaci kombinacji liniowej odpowiednich wersorów.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 12\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 12\boldsymbol{k} \ \square$$

Widać stąd, że współrzędne wektora są zarazem współczynnikami tworzącej ten wektor kombinacji liniowej wersorów.

1.4. Iloczyn skalarny wektorów.

Definicja 1.10

Niech $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$. Iloczynem skalarnym wektorów $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ o tych samych wymiarach nazywamy:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^t \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Z powyższej definicji wynika, że iloczyn skalarny dwóch wektorów jest liczbą.