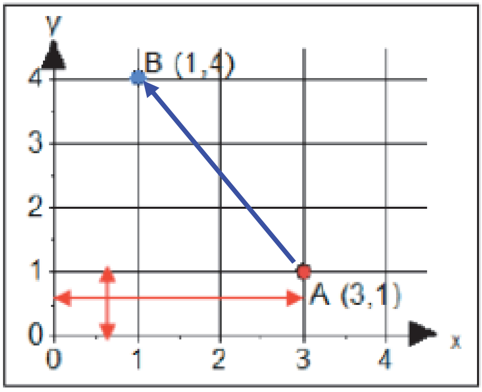
1.2. Wektor w układzie współrzędnych

Przykład z rysunku 3.4 wskazuje, że wygodnie jest przedstawiać wektory w układzie współrzędnych, zaznaczając punkt początkowy, np. A o współrzędnych (3,1) i B (1,4).



Wektor, niebieski na rysunku, skierowany jest „w lewo w górę". Aby opisać to matematycznie, policzmy, że wzdłuż osi OX jest to przesunięcie o 2 w lewo (czyli o minus 2) i +3 wzdłuż osi OY. Wektorowi **AB**przypisujemy więc współrzędne [-2, 3].

<u>Jak obliczamy współrzędne wektora?</u>
Tak jak to zrobiliśmy na rysunku powyżej: od współrzędnych końca wektora, czyli punktu B(3,1) odejmujemy współrzędne początku wektora, czyli A(1,4)

AB = [3-1, 1-4]=[2, -3]

Innymi słowy

$$\mathbf{AB} = [a, b] = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

1.4. Wektor swobodny

Opisując wektor za pomocą jego współrzędnych, dokonaliśmy sporego uogólnienia: zapominamy, że wektor ma punkt zaczepienia. Jest to bardzo przydatne, również w fizyce. Prąd na Wiśle w Toruniu jest wszędzie taki sam: z lewa na prawo (patrząc ze Starego Miasta). I mewy na krze i łódka znoszone są zawsze z taką samą *prędkością dryfu*.

Fot. 4.4 Po Wiśle w Toruniu zimą żeglują tylko mewy na krze. Latem, łódka płynie w poprzek rzeki, ale jak mewy, też jest znoszona prądem (na tych zdjęciach w prawo).

W dalszej części tego kursu, będziemy traktować wektory jako wektory swobodne, czyli po prostu *uporządkowaną parę* liczb. Para ta określa kierunek, zwrot i wartość wektora.

Wektory można zapisywać w postaci standardowo stosowanej w geometrii: $\overrightarrow{OP} = \langle a,\ b\rangle$. Można także używać zapisu macierzowego: $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Wektor jest wówczas traktowany jak macierz składająca się z jednej kolumny.

Macierzą nazywamy prostokątną tablicę o m wierszach i n kolumnach, postaci: $$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$ gdziea_{ij}, nazywany elementem macierzy, jest liczbą. Liczbę wierszy m i liczbę kolumn n macierzy nazywamy jej wymiarem i oznaczamy $m \times n$.

W przestrzeni trójwymiarowej, każdy punkt opisywany jest za pomocą trzech współrzędnych. Zatem wektor w takiej przestrzeni także opisany jest za pomocą trzech współrzędnych.

Definicja 1.1

Wektorem w przestrzeni trójwymiarowej nazywamy uporządkowaną trójkę liczb (a, b, c). Liczby te nazywamy współrzędnymi wektora.

Jeżeli początkiem wektora $\boldsymbol{a}$ jest punkt Oo współrzędnych (x_1, y_1, z_1) a końcem punkt P o współrzędnych (x_2, y_2, z_2), to wektor $\boldsymbol{a}$ można zapisać w postaci:

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \text{ gdzie } a = x_2 - x_1,\ b = y_2 - y_1,\ c = z_2 - z_1.$$

Definicja 1.2

Długością wektora nazywamy pierwiastek z sumy kwadratów jego współrzędnych.

Długość wektora $\boldsymbol{a}$ oznaczamy symbolem $|\boldsymbol{a}|$.

W przypadku wektora na płaszczyźnie wektor $\overrightarrow{OP}$ jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości odpowiednio a i b. Z twierdzenia Pitagorasa wynika więc, że $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Podobną zależność można wyprowadzić dla wektora w przestrzeni trójwymiarowej.

Przykład 1.1

Obliczyć długości wektorów:

a) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

b) $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie

a) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

b) $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{8^2 + 2^2 + 9^2} = \sqrt{64+4+81} = \sqrt{149}$ □

Przykład 1.2

Dane są punkty P_1 (5, 6, -2) iP_2 (-3, 8, 7). Obliczyć współrzędne i długości wektorów $\overrightarrow{P_1P_2}$ oraz $\overrightarrow{P_2P_1}$.

Rozwiązanie

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} -3-5 \\ 8-6 \\ 7-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(-8)^2 + 2^2 + 9^2} = \sqrt{64+4+81} = \sqrt{149}$$

$$\overrightarrow{P_2P_1} = \begin{bmatrix} 5-(-3) \\ 6-8 \\ -2-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{P_2P_1}\right| = \sqrt{8^2 + (-2)^2 + (-9)^2} = \sqrt{64+4+81} = \sqrt{149}$$ □